



Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT



Análisis de tiempos entre fallas considerando Riesgos en Competencia

T E S I S

Que para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias
con especialidad en:
Probabilidad y Estadística

P r e s e n t a:

Julio César Pérez Villegas

Guanajuato, Gto., México, junio de 2008.

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Análisis de tiempos entre fallas considerando Riesgos en Competencia

Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en
Probabilidad y Estadística presenta

Julio César Pérez Villegas

Integrantes del Juardo:

Dr. Luis Alberto Escobar Restrepo (CIMAT - Lousiana State University)
Presidente

Dr. Jorge Domínguez Domínguez (CIMAT)
Secretario

Dr. Enrique Raúl Villa Diharce (CIMAT)
Vocal y Director de Tesis
(Vo. Bo. en representación del Jurado)

A mis papás:

María Elia, Salvador

y a mi hermana

Yadira

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer al CIMAT por esta inolvidable experiencia que viví durante casi tres años.

Al Dr. Enrique Raúl Villa Diharce por haberme dirigido en el desarrollo de este trabajo de tesis y por toda la paciencia que tuvo. A mis sinodales: Dr. Luis Alberto Escobar Restrepo y Dr. Jorge Domínguez Domínguez por sus invaluable comentarios, sugerencias hechas al trabajo y por su apoyo, son unas excelentes personas.

Al Ing. Manuel Vázquez Tejeda, Ing. Joel Cárdenas Morúa, “Chimal”, Elvira y Fernando Chavira, personal de RIAMA (Refinería Ing. Antonio M. Amor) por las facilidades para la obtención de los datos que se usaron en la aplicación hecha, así como al LABEST por su apoyo.

Al CONACyT por la beca otorgada para la realización de mis estudios de maestría así como al CONCyTEG y al CIMAT por su apoyo para la terminación de la escritura de la tesis.

Por último, y no menos importante, a toda la gente que tuve la dicha de conocer, tanto profesores, compañeros de otras maestrías como personal del CIMAT, gracias.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación de la tesis	3
1.2. Objetivos	3
2. Riesgos en Competencia	5
2.1. Conceptos básicos de confiabilidad	5
2.2. Funciones estimables de los datos de riesgos en competencia	8
2.3. Riesgos en competencia como tiempos latentes de falla	11
3. Análisis de datos de Riesgos en Competencia	13
3.1. Función de verosimilitud	13
3.2. Riesgos independientes	16
3.2.1. Estimador Kaplan-Meier	17
3.3. Riesgos dependientes	17
3.3.1. Cópulas	18
3.3.2. Dependencia	19
3.3.3. Cópulas Arquimedianas	20
3.4. El problema de no identificabilidad	21
3.5. Ejemplo	27
4. Riesgos en Competencia en Sistemas Reparables	33
4.1. Terminología y notación para sistemas reparables	33
4.2. Teoría básica de procesos puntuales	35
4.3. Procesos de renovación	38
4.3.1. El proceso de Poisson	39
4.4. El proceso de Poisson no homogéneo	41
4.5. Análisis de datos de un sistema reparable	44
4.5.1. Métodos gráficos	44
4.5.2. Modelos para los PPNH	44
4.5.3. Elección de un modelo PPNH	57
4.6. Mantenimiento en sistemas reparables	58
4.6.1. Mantenimiento preventivo	58
4.6.2. Mantenimiento, sistemas reparables y riesgos en competencia	60
4.7. Modelos de riesgos en competencia	61
4.7.1. Recortes aleatorios (Random clipping)	61
4.7.2. Signos aleatorios	63
4.7.3. Copula graphic estimator	64
4.7.4. Mezcla de exponenciales	65

5. Aplicación	67
5.1. Descripción del equipo	67
5.2. Inferencia para la función de intensidad	69
5.2.1. Función de intensidad log lineal	70
5.2.2. Función de intensidad potencia (Weibull)	72
5.3. Inferencia para modelos de riesgos en competencia	75
5.3.1. Enfoque bivariado	75
5.3.2. Enfoque de tiempos latentes	77
5.4. Conclusiones	87
5.5. Trabajo futuro	87
Bibliografía	89

Índice de figuras

2.1. Gráficas de las funciones de la Tabla 2.2 con $\gamma = 1.5$ y $\lambda = 1$	9
3.1. Muestra de tamaño 500 de la cópula Gamma.	19
3.2. Log verosimilitud y verosimilitud perfil relativa del parámetro de dependencia α	31
3.3. Log verosimilitud y verosimilitud perfil relativa del parámetro $\tilde{\alpha}$	31
3.4. Log verosimilitud y verosimilitud perfil relativa del parámetro $\tilde{\alpha}$ para el modelo con la cópula Gumbel.	32
4.1. Ejemplo de un sistema reparable y un sistema no reparable.	34
4.2. Función de intensidad completa, condicionada en los tiempos de falla $t = 2, 5, 9, 11, 13, 15$	38
4.3. Posibles variables de interés para un proceso de renovación.	41
4.4. Ejemplo de tendencia en tiempos de falla para una máquina de propulsión.	45
4.5. Relación entre los objetivos de la organización, los procesos de producción y el mantenimiento.	59
4.6. Categorías del mantenimiento preventivo.	60
4.7. Diagramas que ilustran un buen y un mal programa de mantenimiento, donde la línea continua representa el tiempo del evento observado y la línea discontinua el tiempo hipotético al cual el evento no observado se hubiera presentado.	61
4.8. Relación entre $F_{T_1}(t)$ y $F_{T_2}(t)$ en el cuadrado unitario.	65
5.1. Clasificación de bombas con base en su funcionamiento y tipo de accionamiento.	68
5.2. Ejemplo de dos bombas centrífugas.	69
5.3. Histogramas de los tiempos entre fallas, entre mantenimientos y entre paros del equipo.	69
5.4. Gráficas de caja de los tiempos entre fallas, mantenimientos y entre paros del equipo.	70
5.5. Gráficas del número de fallas, mantenimientos y paros del equipo contra tiempo de operación.	70
5.6. Verosimilitudes perfiles relativas para los parámetros de la función de intensidad log lineal así como intervalos aproximados de verosimilitud confianza de 95%.	71
5.7. Histogramas de los tiempos entre fallas, mantenimientos y entre paros del equipo sin el tiempo 246.	73
5.8. Gráficas de caja de los tiempos entre fallas, mantenimientos y entre paros del equipo sin el tiempo 246.	73
5.9. Gráficas del número de fallas, mantenimientos y paros del equipo contra tiempo de operación sin el tiempo 246.	73
5.10. Verosimilitudes perfiles relativas para los parámetros de la función de intensidad log lineal así como intervalos aproximados de verosimilitud confianza de 95% sin el tiempo 246.	74
5.11. Papeles de probabilidad para los tiempos entre falla usando las distribuciones Weibull, lognormal y loglogística.	75

5.12. Papeles de probabilidad para los tiempos entre mantenimiento usando las distribuciones Weibull, lognormal y loglogística.	76
5.13. Verosimilitudes perfiles relativos e intervalos aproximados de verosimilitud confianza de 95 % para los parámetros del modelo mezcla de lognormales.	77
5.14. Sub confiabilidades para falla, censura y confiabilidad marginal de T	78
5.15. Cantidades estimables con los datos de riesgos en competencia.	79
5.16. Estimaciones empíricas de confiabilidades.	80
5.17. Verosimilitudes perfiles relativos para los parámetros de los dos modelo e intervalos aproximados de verosimilitud confianza de 95 %.	81
5.18. Confiabilidades paramétricas (lognormal) y no paramétricas (sub confiabilidad normalizada y Kaplan-Meier) para falla.	81
5.19. Relación entre α y τ para las cópulas utilizadas.	83
5.20. Estimaciones para las confiabilidades marginales de falla y censura (mantenimiento) utilizando α tal que $\tau = 0.5$	83
5.21. Estimaciones para las confiabilidades marginales de falla y censura (mantenimiento) utilizando los siguientes valores $\tau = 0, 0.25, 0.50, 0.75$	84
5.22. Verosimilitudes relativas perfiles e intervalos aproximados de verosimilitud confianza de 95 % para los parámetros de (5.1).	86
5.23. Confiabilidades marginales para falla usando el método propuesto en [32] con las cópulas propuestas ($\tau = 0.5$) y utilizando el modelo de signos aleatorios.	86

Índice de tablas

2.1. Relación entre las funciones de densidad, distribución, confiabilidad y riesgo.	7
2.2. Expresiones para las funciones de densidad, distribución, confiabilidad y riesgo de una variable aleatoria Weibull con parámetros de forma y escala $\gamma > 0$ y $\lambda > 0$, respectivamente.	8
3.1. Tiempos de falla y causa (T, C) para 36 componentes eléctricos [26].	28
3.2. Resultados para la prueba de hipótesis $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$ vs $H_a : \lambda_1 \neq \lambda_2$ para el modelo de mezcla exponencial utilizando la prueba de razón de verosimilitudes.	29
3.3. Resultados para la comparación de los modelos de mezcla exponencial y mezcla Weibull utilizando el estadístico de razón de verosimilitudes.	30
4.1. Probabilidad de falla y no falla en el intervalo (a, b) para un PPNH con función de intensidad $\lambda(t)$	42
5.1. Datos de riesgos en competencia para una bomba centrífuga (t_i, c_i) . La causa 1 corresponde a paro por reparación y la causa 2 a paro por mantenimiento preventivo.	69
5.2. Estimaciones de las funciones de intensidad obtenidas bajo los modelos log lineal y Weibull sin el tiempo 246.	75
5.3. Estimaciones de los parámetros para los dos modelos lognormal.	80

Capítulo 1

Introducción

La confiabilidad como área de estudio es relativamente reciente. Antes de 1940 la mayor parte del trabajo relacionado con el control de calidad o los problemas de mantenimiento, no concebían a la confiabilidad como un área de estudio.

La grandes cantidades de fallas que se presentaron en el equipo bélico, tales como equipo de comunicación, aviones, armamento, etcétera, durante la segunda guerra mundial, puso en evidencia el bajo nivel de confiabilidad de los equipos. El desarrollo de la confiabilidad fue un factor estratégico que debió impulsarse para lograr una ventaja militar. En esta época se formaron distintos grupos de trabajo, principalmente por ingenieros y estadísticos, con el fin de resolver problemas e impulsar el conocimiento de la confiabilidad.

Después de la segunda guerra mundial, la confiabilidad se fue aplicando paulatinamente en la industria, concentrando las investigaciones en sectores como: plantas nucleo-eléctricas, industria aereo-espacial, industria química y electrónica. Estos sectores fueron puntos de acumulación de la investigación, debido a que son sectores donde las consecuencias de las fallas tienen costos muy altos, tanto en vidas humanas como en dinero.

Dentro de las iniciativas de calidad que se han logrado a lo largo del tiempo, últimamente la confiabilidad es un tópico que se ha integrado, después del control estadístico de procesos y el diseño de experimentos. Esta secuencia es natural, ya que la producción de artículos de alta confiabilidad presupone tener procesos controlados y mejorados, pues el proceso de producción es un factor determinante para alcanzar un alto nivel de confiabilidad. La globalización ha llevado a los fabricantes a participar en un mercado donde hay un gran número de competidores, siendo algunos de ellos, productores que han integrado un gran nivel de tecnología en los productos que ofrecen al consumidor. Por esto, la lucha por atraer y retener a los clientes, esto es, la lucha por lograr la lealtad del cliente, ejerce una presión fuerte sobre los fabricantes para crear productos con un alto nivel de confiabilidad. En algunos casos, incluso el desarrollo de la confiabilidad va más allá de la venta del producto ya que puede considerarse de gran interés la venta de servicios en el área de confiabilidad, como es el caso en el que el fabricante oferta programas de mantenimiento de los productos que entrega al cliente. De esta manera, la confiabilidad se convierte en un factor estratégico para el negocio de las empresas.

Para cualquier producto existe un ciclo de vida, el cual es la sucesión de etapas por la que pasa, desde que es creado hasta que, después de funcionar por algún tiempo, entra en una etapa de desgaste y finalmente falla o se sustituye porque se considera que ya no satisface los requerimientos del usuario.

En la etapa inicial definimos los requerimientos que se tienen para el producto que se va

a crear. Estos requerimientos se identifican previamente a través de estudios de mercado. En la etapa de diseño se asignan al producto las características deseables de calidad, siendo una de ellas la confiabilidad. El diseño original se modifica en la etapa de desarrollo, con el fin de lograr una mejora y hacer los cambios necesarios. Una vez que el diseño se congela, entramos a la etapa de producción, en donde conjuntamos los materiales y los procesos necesarios para la fabricación del producto. Posteriormente llegamos a la etapa de la venta del producto. Una vez que este está en las manos del usuario, empieza a trabajar en condiciones normales de operación que generalmente son variables. Por ejemplo las condiciones ambientales: temperatura, humedad, etc. y las condiciones de uso: frecuencia, esfuerzo, etc. Finalmente, después de algún tiempo de operación, el producto entra en un proceso de envejecimiento y en algún momento se deshecha, debido a que deja de funcionar o resulta más costoso repararlo que sustituirlo.

No es exagerado decir que en todas las etapas del ciclo de vida de los productos podemos aplicar diferentes herramientas de confiabilidad para elevar el nivel de confiabilidad paulatinamente, desde la etapa de diseño hasta la etapa de producción. En la etapa de diseño puede usarse el Análisis de Modo y Efecto de Falla (AMEF), el cual consiste en hacer un listado de posibles modos de falla y sus consecuencias, cuantificando las probabilidades de los posibles modos de falla y su severidad. Con esta información se evalúa el riesgo y se determina cuál es el modo de falla que tiene la mayor contribución al riesgo y con esto sabemos cuál modo de falla corregir para mejorar la confiabilidad. Cabe hacer notar que este procedimiento comúnmente se lleva a cabo reuniendo en una sesión, tipo lluvia de ideas, a un grupo de personas que tienen conocimiento del equipo analizado o de equipos similares. En el caso de que el equipo no se haya construido previamente, este es un tipo de análisis de confiabilidad virtual.

En las etapas de diseño y desarrollo se pueden hacer pruebas de vida acelerada para tener estimaciones de la confiabilidad que se va logrando en las diferentes fases de estas etapas. Aquí las pruebas se llevan a cabo con unidades prototipo que se construyen para ver cómo se comporta el producto con el diseño propuesto. En la etapa de producción es necesario hacer pruebas de vida acelerada con el fin de conocer el impacto que tienen los materiales y los procesos utilizados en la fabricación. El estudio de confiabilidad que se hace en esta etapa o en las anteriores, debe arrojar resultados en un tiempo breve, con el fin de hacer oportunamente los cambios necesarios en el diseño o en el proceso, para elevar la confiabilidad.

Cuando investigamos la confiabilidad de una unidad, con frecuencia esa unidad es un sistema formado por varios componentes o subsistemas, por lo cual, se tienen varios modos de falla que se pueden distinguir. Cuando registramos el tiempo de falla de una unidad sin considerar cuál modo de falla es el causante, el análisis estadístico de los datos no presenta mayores complicaciones. En cambio, cuando observamos el proceso de falla con el enfoque de modos de falla, esto es, registramos para cada unidad el tiempo en el cual se presentó la falla y además el modo de falla causante de la interrupción del funcionamiento, el análisis de los datos presenta varias dificultades.

En el momento en que son considerados los diferentes modos de falla que se encuentran en un componente o sistema determinado, cada modo de falla tiene una distribución de probabilidades para el tiempo de falla. Así, cuando estudiamos la confiabilidad de una unidad considerando los diferentes modos de falla que existen, asociamos a cada unidad no un tiempo de falla, sino un vector de tiempos de fallas que tiene una distribución de probabilidad conjunta. Si se conoce esta distribución conjunta, se pueden estimar cantidades de interés para cada modo de falla. Cuando hacemos un estudio de confiabilidad de unidades en las que queremos elevar la confiabilidad, es de gran interés hacer el estudio a nivel de modos de falla, para poder saber cuál es el modo de falla que contribuye más a la falta de confiabilidad y así corregirlo.

El análisis de datos de falla, considerando los diferentes modos de falla presentes, es fácil de hacer cuando para cada componente registramos los tiempos de falla de todos los modos de falla, en este caso, para cada componente tenemos un vector de tiempos de falla. En este caso, el análisis de datos corresponde a un análisis multivariado de tiempo de falla. Desgraciadamente, con gran frecuencia los tiempos de falla que se pueden registrar en los estudios de confiabilidad, no son los tiempos de todos los modos de falla, ya que al fallar un componente debido a un modo de falla determinado, dicho componente deja de funcionar y ya no es posible observar los demás modos de falla. En este caso, para cada componente solo se tiene una pareja de datos: el tiempo de falla y el modo de falla. Con este tipo de datos, el análisis se complica considerablemente cuando los modos de falla son dependientes, ya que los datos no tienen información sobre el patrón de dependencia de los diferentes modos de falla. Este esquema de observación o tipo de datos se presenta frecuentemente en otras áreas de estudio de supervivencia, en donde la falla o muerte de un individuo bajo estudio se puede deber a diferentes causas y a cada posible causa se le denomina riesgo.

1.1. Motivación de la tesis

Para dar una motivación acerca del problema que se trabajará a lo largo de la tesis, considere un equipo que presenta interrupciones durante su funcionamiento, las cuales se realizan en los tiempos t_1, t_2, \dots, t_n . Suponga que los paros del equipo son provocadas por dos causas:

- a) Reparación debido a falla del equipo
- b) Ejecución de mantenimiento preventivo.

Lo anterior implica que, además de contar con los tiempos de paro t_i , también se contará con una “etiqueta” o “identificador” c_i que señale la causa por la cual el equipo dejó de operar, esto es, los datos con los que se cuenta son de la siguiente forma $(t_1, c_1), (t_2, c_2), \dots, (t_n, c_n)$, con $t_i > 0$ y $c_i = 1, 2$ para $i = 1, 2, \dots, n$. A este tipo de datos se les conoce como datos de riesgos en competencia.

Un problema interesante que surge en este contexto es el de evaluar la calidad del mantenimiento preventivo al equipo para lo cual se podría estar interesado, por ejemplo, en las distribuciones de probabilidad marginales de los tiempos de falla y tiempos de mantenimiento.

1.2. Objetivos

Entre los objetivos principales de la tesis se encuentran

- a) Dar un panorama general de la teoría de riesgos en competencia enfatizando su uso en confiabilidad y en particular, al estudio del mantenimiento a sistemas reparables.
- b) Mostrar el problema de no identificabilidad al utilizar el enfoque de tiempos latentes así como la sobrestimación de la función de confiabilidad al asumir independencia cuando realmente no la hay.
- c) Discutir posibles soluciones a los problemas anteriores modelando la dependencia entre los riesgos.

Para desarrollar lo anterior, el trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se presentan conceptos básicos de confiabilidad entre los que se encuentran funciones para modelar el tiempo de falla T , como son la función de confiabilidad y la

función de riesgo. Estas funciones servirán para abordar algunos aspectos básicos en la teoría concerniente a riesgos en competencia y conducirán a definiciones de funciones de probabilidad similares. Se definen los riesgos en competencia desde los dos enfoques presentes en la literatura: como variable aleatoria bivariada y como tiempos latentes.

En el capítulo 3 se plantea la función de verosimilitud en forma general. Se estudia el caso en donde los riesgos se consideran independientes, y se menciona el estimador no paramétrico Kaplan-Meier de la función de supervivencia o confiabilidad para datos de falla que tienen asociado un mecanismo de censura por la derecha, que se supone independiente del mecanismo de falla. En el caso de que los riesgos no sean independientes, como generalmente ocurre, se menciona una forma de modelar la dependencia a través de las funciones denominadas cópulas. Para finalizar, se aborda el problema de no identificabilidad, que es muy común. Se muestra cómo, hasta cierto punto, los datos de riesgos en competencia nos limitan para la elección de modelos debido a la carencia de información que tienen sobre la dependencia.

En el capítulo 4 se dan algunos conceptos generales básicos en el estudio de sistemas reparables, se presenta en forma breve la teoría de procesos puntuales, entre los que se encuentran los procesos de Poisson homogéneos y no homogéneos, así como también algunas propuestas para modelar la función de intensidad y el correspondiente proceso de inferencia para estas, que incluye las pruebas de hipótesis relevantes en cada caso. Se menciona la importancia que tiene el estudio del mantenimiento preventivo en los sistemas reparables y el enlace entre los sistemas reparables y el mantenimiento preventivo a través de riesgos en competencia. Para finalizar se mencionan algunos modelos útiles en el estudio de datos de riesgos en competencia.

Por último, en el capítulo 5 se presenta un análisis hecho con datos de riesgos en competencia pertenecientes a una bomba centrífuga que se utiliza en el lavado de algunos productos corrosivos. Se explora la tendencia de los tiempos de falla y se estiman funciones de intensidad. También se desarrolla el análisis de los datos considerando los dos enfoques. Por último se proporcionan las conclusiones del trabajo y posibles actividades a realizar en el futuro.

Capítulo 2

Riesgos en Competencia

Debido a que el tiempo de falla, T , de cierto componente o sistema, para fines de estudio y modelación, se puede conceptualizar como una variable aleatoria continua no negativa, para estudiar T es natural pensar en funciones que lo caracterizan o proveen información útil. Naturalmente, tales funciones, entre otras, son las funciones de densidad, de distribución y de riesgo, las cuales serán definidas en la sección 2.1 para variables aleatorias continuas. Estas funciones guardan una relación especial debido a que son equivalentes, es decir, teniendo conocimiento de alguna de ellas se pueden calcular fácilmente las demás, pues existen relaciones funcionales explícitas. Se podría pensar ¿porqué trabajar con varias si con una función obtengo información de las otras? Una respuesta es que cada función tiene una interpretación diferente, de modo que, dependiendo del problema, puede utilizarse una u otra. Como se mencionó en la Introducción, en el momento en que son considerados los diferentes modos de falla para un componente, cada uno de estos modos de falla tiene asociado una distribución de probabilidad, la cual se puede caracterizar por funciones similares a las mencionadas y que se definen en la sección 2.2. Por otro lado, además del modelo bivariado, existe el enfoque de riesgos en competencia como tiempos latentes de falla y se menciona en la sección 2.3.

2.1. Conceptos básicos de confiabilidad

Una de las funciones con la cual se puede caracterizar una variable aleatoria es la *función de distribución*, la cual se define a continuación.

Definición 2.1.1 (Función de distribución) Sea T una variable aleatoria definida en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . La función de distribución de T está dada por

$$F_T(t) = P[\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \leq t\}] = P(T \leq t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ya que los tiempos de vida son no negativos, con base en la definición anterior, se tiene que $F_T(t) = 0$ para $t \leq 0$. Fijando $0 < t_0$, $F_T(t_0)$ es la probabilidad de que un componente falle antes de t_0 . Alternativamente, pensando en una población de componentes, $F_T(t_0)$ se puede interpretar como la proporción esperada de componentes que fallan antes del tiempo t_0 .

Otra función importante y que mantiene una relación muy conocida con la función de distribución es la función de densidad.

Definición 2.1.2 (Función de densidad) Cuando la función de distribución de una variable aleatoria T es absolutamente continua, su función de densidad, está definida por

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t), \quad t > 0. \quad (2.1)$$

Equivalentemente, (2.1) se puede expresar como

$$f_T(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t},$$

que se puede utilizar para medir la frecuencia relativa de fallas en una vecindad de t , de manera que $\frac{f_T(t_1)}{f_T(t_2)} = a$ significa que en una vecindad de t_1 se esperan a veces la cantidad de fallas que en una vecindad para t_2 de la misma longitud. Por otro lado, para Δt pequeño, $\Delta t \times f_T(t)$ se puede interpretar como la probabilidad de que un componente falle en una vecindad inmediata a t , es decir, en $(t, t + \Delta t]$ o, en su caso, la proporción de componentes que se espera fallen en una vecindad inmediata a t .

De (2.1), se tiene que $F_T(t) = \int_0^t f_T(z) dz$, lo que significa gráficamente que $F_T(t)$ es el área bajo la curva de $f_T(t)$ en el intervalo $(0, t]$.

Una función más que se utiliza para modelar al tiempo de falla T es la función de confiabilidad, también llamada función de supervivencia, la cual es el complemento de la función de distribución y proporciona la probabilidad de que el componente no falle antes del tiempo t , o equivalentemente, que la falla ocurra después del tiempo t .

Definición 2.1.3 (Función de confiabilidad) *La función de confiabilidad de una variable aleatoria T está definida por*

$$\bar{F}_T(t) = P(T > t), \quad t \geq 0.$$

Con base en la definición de la función de confiabilidad, $\bar{F}_T(t)$, se obtiene que la forma en que esta se relaciona con la función de distribución es, $\bar{F}_T(t) = 1 - F_T(t)$, de donde se obtiene la correspondiente conexión con la función de densidad

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d}{dt} F_T(t) \\ &= \frac{d}{dt} [1 - \bar{F}_T(t)] \\ &= -\frac{d}{dt} \bar{F}_T(t), \end{aligned}$$

o equivalentemente, $\bar{F}_T(t) = \int_t^\infty f_T(z) dz$.

Para fines del presente trabajo, la última función que se considera para modelar T es la función de riesgo, también llamada la función de tasa de fallas.

Definición 2.1.4 (Función de riesgo) *La función de riesgo se define como*

$$h_T(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t}, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

Esta función es la función de la tasa instantánea de fallas y expresa la propensión a la falla en un intervalo pequeño inmediatamente después de t , considerando que el componente ha funcionado hasta el tiempo t . Esto es, para Δt pequeño y $t > 0$, se tiene que

$$h_T(t) \times \Delta t \approx P(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t),$$

es la probabilidad de que un componente que ha estado funcionando correctamente hasta el tiempo t , falle en el intervalo $(t, t + \Delta t]$.

La función de riesgo se puede interpretar como tasa de fallas en el siguiente sentido: suponga que al tiempo $t > 0$ se tienen una cantidad de componentes en funcionamiento, sea $n(t)$ la

cantidad, entonces $n(t) \times h_T(t)$ es aproximadamente el número de fallas por unidad de tiempo o, equivalentemente, $h_T(t)$ es aproximadamente igual al número de fallas por unidad de tiempo por unidad en riesgo, de modo que $h_T(t)$ tiene unidades de fracción fallada por unidad de tiempo [23].

De (2.2) se obtiene la siguiente relación entre la función de riesgo, la función de densidad y de confiabilidad

$$\begin{aligned}
 h_T(t) &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} \\
 &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P(T \leq t + \Delta t) - P(T \leq t)}{P(T > t)} \\
 &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{\bar{F}_T(t)} \\
 &= \frac{1}{\bar{F}_T(t)} \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{\Delta t} \\
 &= \frac{f_T(t)}{\bar{F}_T(t)}, \quad t > 0.
 \end{aligned}$$

De la relación anterior se tiene que $h_T(t) = -\frac{d}{dt} \log[\bar{F}_T(t)]$, de modo que, considerando $\bar{F}_T(0) = 1$, se obtiene $\int_0^t h_T(z) dz = -\log[\bar{F}_T(t)]$, es decir, $\bar{F}_T(t) = \exp[-\int_0^t h_T(z) dz]$.

En la Tabla 2.1 se resumen las relaciones de las funciones presentadas.

	Densidad	Distribución	Confiabilidad	Riesgo
Densidad	$f_T(t)$	$\frac{d}{dt} F_T(t)$	$-\frac{d}{dt} \bar{F}_T(t)$	$h_T(t) \exp \left[-\int_0^t h_T(x) dx \right]$
Distribución	$\int_0^t f_T(x) dx$	$F_T(t)$	$1 - \bar{F}_T(t)$	$1 - \exp \left[-\int_0^t h_T(x) dx \right]$
Confiabilidad	$\int_t^\infty f_T(x) dx$	$1 - F_T(t)$	$\bar{F}_T(t)$	$\exp \left[-\int_0^t h_T(x) dx \right]$
Riesgo	$\frac{f_T(t)}{\int_t^\infty f_T(x) dx}$	$-\frac{d}{dt} \log[1 - F_T(t)]$	$-\frac{d}{dt} \log[\bar{F}_T(t)]$	$h_T(t)$

Tabla 2.1: Relación entre las funciones de densidad, distribución, confiabilidad y riesgo.

A manera de ilustración, en la Tabla 2.2 se muestran las expresiones de las funciones definidas y que corresponden a una variable aleatoria T que sigue una distribución Weibull con parámetro de forma $\gamma > 0$ y de escala $\lambda > 0$.

Densidad	Distribución
$f_T(t) = \frac{\gamma}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\gamma\right],$	$F_T(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\gamma\right],$
Confiabilidad	Riesgo
$\bar{F}_T(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\gamma\right],$	$h_T(t) = \frac{\gamma}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\gamma-1}.$

Tabla 2.2: Expresiones para las funciones de densidad, distribución, confiabilidad y riesgo de una variable aleatoria Weibull con parámetros de forma y escala $\gamma > 0$ y $\lambda > 0$, respectivamente.

Para apreciar la forma de estas funciones, en la Figura 2.1 se muestran las gráficas asumiendo $\gamma = 1.5$ y $\lambda = 1$.

2.2. Funciones estimables de los datos de riesgos en competencia

Suponga que se cuenta con un sistema o componente que tiene asociados k diferentes modos de falla. Suponga también que el componente deja de funcionar cuando se presenta el primer modo de falla. Para este caso, los datos bivariados que se obtienen son de la forma (T, C) , donde $T > 0$ es el tiempo al cual falló y $C = 1, 2, \dots, k$ es la causa o el modo de falla. Para cada modo de falla se tienen funciones que caracterizan al vector aleatorio bivariado (T, C) . Tales funciones, naturalmente, se pueden estimar de los datos y se definen a continuación.

Comenzaremos por el análogo a la función de distribución.

Definición 2.2.1 (Función de sub distribución) La función de sub distribución *está definida por*

$$F_{T,C}(t, i) \equiv P(T \leq t, C = i), \quad t > 0, i = 1, 2, \dots, k.$$

La interpretación para la función de sub distribución es similar a la usada para función de distribución. $F_{T,C}(t, i)$ es la probabilidad de que el componente falle antes de t y la falla sea debido al modo i o, pensando en una población de componentes, se puede interpretar como la proporción de componentes que se espera fallen antes de t y las fallas sean debido al modo i .

Cabe notar que una razón por la cual se usa el prefijo *sub* es que $F_{T,C}(t, i)$ *no* es una función de distribución propia, pues no calcula probabilidades acumuladas para ambas variables, solo para T . En este caso, observe que

$$\begin{aligned} \bar{F}_{T,C}(\infty, i) &= P(T \leq \infty, C = i) \\ &= P(\Omega_1 \cap \{C = i\}) \\ &= P(C = i) \equiv p_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \end{aligned}$$

es igual a uno solamente si existiera un modo de falla, lo cual, en este caso, no es así.

Otra función es la de sub confiabilidad, que denotaremos por $\bar{F}_{T,C}(t, i)$.

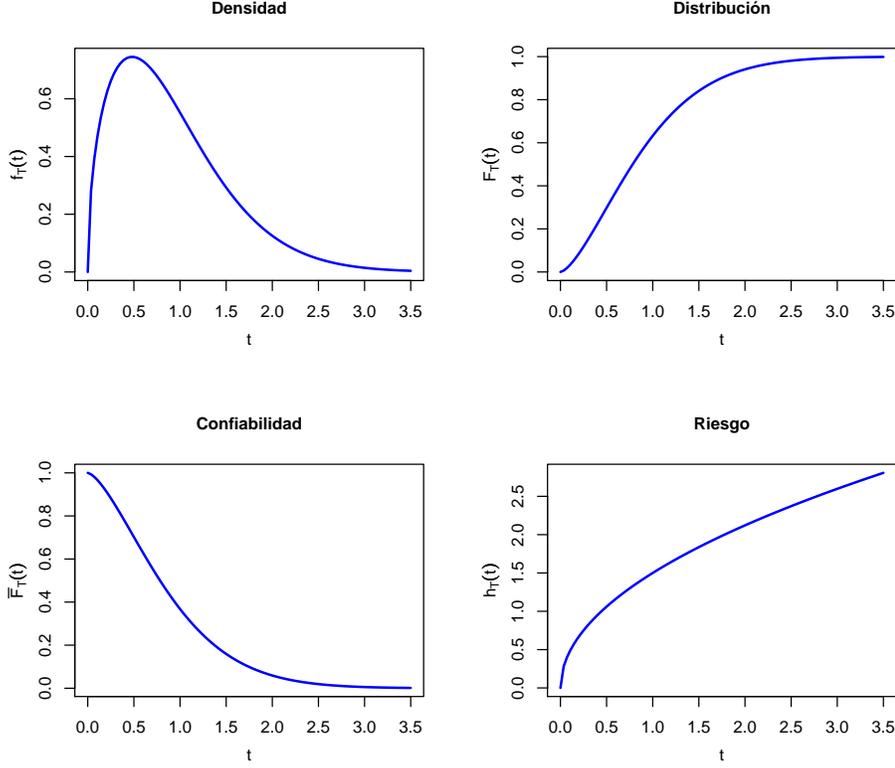


Figura 2.1: Gráficas de las funciones de la Tabla 2.2 con $\gamma = 1.5$ y $\lambda = 1$.

Definición 2.2.2 (Función de sub confiabilidad) La función de sub confiabilidad está definida por

$$\bar{F}_{T,C}(t, i) \equiv P(T > t, C = i), \quad t > 0, i = 1, 2, \dots, k.$$

Una relación entre las funciones de sub distribución y sub confiabilidad está dada por

$$F_{T,C}(t, i) + \bar{F}_{T,C}(t, i) = p_i,$$

la cual se puede verificar como sigue

$$\begin{aligned} p_i &= P(C = i) \\ &= P(\Omega_1 \cap \{C = i\}) \\ &= P((\{T \leq t\} \cup \{T > t\}) \cap \{C = i\}), \quad t > 0 \\ &= P(T \leq t, C = i) + P(T > t, C = i), \quad t > 0 \\ &= F_{T,C}(t, i) + \bar{F}_{T,C}(t, i), \quad t > 0, \end{aligned}$$

donde

$$p_i \equiv P(C = i) = F_{T,C}(\infty, i) = \bar{F}_{T,C}(0, i).$$

Se debe tener cuidado con la interpretación de las funciones de probabilidad, hasta ahora, definidas. La función $F_{T,C}(t, i)$, como se mencionó, es la probabilidad de que *ambos*: el componente falle antes de t , es decir, $T < t$ y el modo de falla sea el i -ésimo, esto es $C = i$. Si pensamos que cada modo de falla tiene asociado un tiempo de falla, T_i , $i = 1, 2, \dots, k$, entonces, en general, $F_{T,C}(t, i)$ *no* es igual a la distribución marginal de T_i , la cual es $F_{T_i}(t) = P(T_i \leq t)$, que

es la probabilidad de que el tiempo de falla asociado al modo de falla i sea menor o igual que t . Esta concepción de confiabilidades marginales está relacionada con los tiempos latentes de falla que se desarrollará en la siguiente sección. Por otro lado, $\bar{F}_{T,C}(t, i)$ no es, en general, igual a la probabilidad de que el tiempo de falla sea mayor que t ($T > t$) para las fallas del tipo i ; esa probabilidad está dada por $P(T > t | C = i)$, la cual se puede expresar como $\bar{F}_{T,C}(t, i)/p_i$. $\bar{F}_{T,C}(t, i)$ es la probabilidad de que el tiempo de falla sea mayor que t y la falla sea del tipo i .

Continuando con las definiciones de las funciones de probabilidad para riesgos en competencia, damos lugar a las correspondientes para la sub densidad y el sub riesgo.

Definición 2.2.3 (Función de sub densidad) *La función de sub densidad está dada por*

$$f_{T,C}(t, i) \equiv \frac{d}{dt} F_{T,C}(t, i), \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

si la derivada existe.

Como consecuencia de la explicación anterior, se tiene que $\int_0^\infty f_{T,C}(x, i) dx = p_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, es decir, la integral de la función de sub densidad sobre todo el rango de variación de T no es igual a uno. Por otro lado, $\frac{f_{T,C}(t_1, i)}{f_{T,C}(t_2, j)} = a$ significa que en una vecindad de t_1 se esperan a veces la cantidad de fallas causadas por el modo i que en una vecindad de la misma longitud para t_2 causadas por el modo j .

Definición 2.2.4 (Función de sub riesgo) *La función de sub riesgo se define como*

$$h_{T,C}(t, i) \equiv \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t, C = i | T > t)}{\Delta t} = \frac{f(t, i)}{\bar{F}_T(t)}, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.3)$$

Continuando con la analogía de las interpretaciones, para Δt pequeño, se tiene que

$$\Delta t \times h_{(T,C)}(t, i) \approx P(t < T \leq t + \Delta t, C = i | T > t),$$

es la probabilidad de que un componente que ha estado funcionando correctamente hasta el tiempo t , falle inmediatamente después de t , es decir, en el intervalo $(t, t + \Delta t]$ y que la falla haya sido del tipo i .

Recordando que (T, C) es la forma general de los datos de riesgos en competencia, es razonable preguntarse por las marginales (distribuciones, confiabilidades, etc.) de T y C , por lo que se comentará al respecto. En términos de las sub distribuciones, la función de distribución de T , que denotaremos por $F_T(t)$, está dada por

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) \\ &= P[(T \leq t) \cap \Omega_2] \\ &= P[(T \leq t) \cap (\cup_{i=1}^k \{C = i\})] \\ &= \sum_{i=1}^k P(T \leq t, C = i) \\ &= \sum_{i=1}^k F_{T,C}(t, i), \quad t > 0, \end{aligned}$$

es decir, la función de distribución (marginal) de T es igual a la suma de las funciones de sub

distribución correspondientes a los modos de falla. Es de resaltar que F_T es propia, pues

$$\begin{aligned} F_T(\infty) &= \sum_{i=1}^k F_{T,C}(\infty, i) \\ &= \sum_{i=1}^k p_i \\ &= 1. \end{aligned}$$

Consecuentemente, las funciones de densidad, confiabilidad y de riesgo para T (todas propias en su sentido correspondiente) son, respectivamente,

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{i=1}^k f_{T,C}(t, i), \quad t > 0, \\ \bar{F}_T(t) &= \sum_{i=1}^k \bar{F}_{T,C}(t, i), \quad t > 0, \\ h_T(t) &= \sum_{i=1}^k h_{T,C}(t, i), \quad t > 0. \end{aligned}$$

A manera de observación, la función que se encuentra en el denominador de (2.3), \bar{F}_T , es la confiabilidad marginal de T , el tiempo de falla.

Función de sub riesgo acumulado

Otra función que caracteriza a una variable aleatoria, y que no se ha mencionado, es la función de riesgo acumulado, que no es más que la integral definida de la función de riesgo. Se define la función de sub riesgo acumulado por

$$H_{T,C}(t, i) = \int_0^t h_{T,C}(x, i) dx, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

se tiene que

$$H_T(t) = \sum_{i=1}^k H_{T,C}(t, i) = \int_0^t \sum_{i=1}^k h_{T,C}(x, i) dx = \int_0^t h_T(x) dx$$

es la función de riesgo acumulado de T . Así,

$$\bar{F}_T(t) = \exp[-H_T(t)] = \exp\left[-\sum_{i=1}^k H_{T,C}(t, i)\right] = \prod_{i=1}^k \bar{F}_{T,C}^*(t, i),$$

donde

$$\bar{F}_{T,C}^*(t, i) \equiv \exp[-H_{T,C}(t, i)].$$

Cabe hacer notar que $\bar{F}_{T,C}^*(t, i)$ tiene las propiedades de una función de confiabilidad (posiblemente impropia), pero en general, no es la confiabilidad de ninguna variable aleatoria observable.

2.3. Riesgos en competencia como tiempos latentes de falla

Considere nuevamente un componente que tiene asociados k modos de falla, el análisis de datos de falla no es difícil llevarlo a cabo cuando para cada componente se registran los

tiempos de falla de *todos* los modos de falla, en este caso, para cada componente se tendría un vector de tiempos de falla (t_1, t_2, \dots, t_k) . Implícitamente a cada modo de falla se le está asociando un tiempo de falla (y por lo tanto una distribución de probabilidad) por ejemplo, el primer modo de falla tiene asociado el tiempo de falla T_1 con *distribución marginal* F_{T_1} .

Sin embargo, cuando se presenta el primer modo de falla, generalmente el componente deja de funcionar y ya no es posible registrar u observar los tiempos de falla correspondientes a los demás modos. En este caso solamente se conocería el valor de una entrada del vector de tiempos de falla y las demás serían censuradas. El tiempo de falla que se registra es $T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$, es decir, el tiempo del primer modo de falla que se presenta y $C = i$ si $T = T_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Estos k tiempos (T_1, T_2, \dots, T_k) se denominan *tiempos latentes de falla* pues, técnicamente, no son observables en el sentido de que los datos con los que se cuenta son del tipo (T, C) . Se asume que $P(T_i = T_j) = 0$, $i \neq j$.

En varias situaciones es de interés estudiar el efecto de la causa i solamente, es decir, con las demás causas ausentes, pues se pueden identificar los modos de falla con mayor impacto en el funcionamiento del producto, corregirlos o mejorarlos y, como consecuencia mejorar del diseño del producto, en tales casos la función $F_{T_i}(t)$ es relevante. Sin embargo, puede acontecer que la eliminación de las demás causas de fallas no represente de manera adecuada las circunstancias reales bajo las que trabaja el componente, es decir, no sería adecuado utilizar solamente los tiempos de falla debido a la causa i y tratar de estimar, por ejemplo, $F_{T_i}(t)$. Cuando eso sucede, no es razonable asumir que cuando T_i es “observado” en forma aislada, su distribución es la misma que la distribución marginal de T_i derivada de la distribución conjunta de (T_1, T_2, \dots, T_k) , en la cual se encuentra modelada la dependencia que puede haber entre los modos de falla. Es por esto que, además de la distribución conjunta de (T, C) y sus marginales, son de interés las distribuciones (o confiabilidades) de los tiempos latentes T_i .

Capítulo 3

Análisis de datos de Riesgos en Competencia

Como se ha mencionado, los datos de riesgos en competencia tienen una estructura bivariada de la forma (T, C) , donde T es el tiempo de falla del componente y C es el modo o causa de falla. También se comentó sobre dos formas de entender el problema de riesgos en competencia: como un modelo bivariado y como tiempos latentes de falla. En cualquiera de los dos enfoques se pueden proponer modelos paramétricos para las funciones de sub confiabilidad y confiabilidad conjunta, respectivamente. La forma en que se hará estimación para los parámetros de las funciones es por máxima verosimilitud, de manera que en la sección 3.1 se presenta, de manera general, la función de verosimilitud. Al trabajar con el enfoque del modelo bivariado, los datos son apropiados para estimar funciones de interés como las sub confiabilidades o las distribuciones marginales de T y C . Por el contrario, cuando se trabaja con el enfoque de tiempos latentes de falla, en muchos casos, es de buen juicio pensar que los tiempos T_i guardan cierta dependencia entre sí, misma que es de interés modelar y de la cual no se puede obtener información directamente de los datos, pues lo ideal sería tener el vector de los tiempos de falla (t_1, t_2, \dots, t_k) correspondiente a todos los modos de falla, pero solamente se cuenta con el conocimiento de una entrada del vector. No obstante, en la sección 3.2 se estudia el caso en el que los modos de falla se consideran independientes, esto es, en el que T_i , $i = 1, 2, \dots, k$ son independientes. Un resultado muy conocido en el área establece que dado cualquier modelo de confiabilidad conjunta, existe otro en el cual los tiempos latentes son independientes y ambos modelos dan origen a las mismas sub confiabilidades [31]. Este problema es conocido como el problema de no identificabilidad y se desarrollará en la sección 3.4 y se puede interpretar de la siguiente manera: con base en los datos no podemos discernir de cuál modelo provienen las funciones estimadas, de una confiabilidad conjunta que considera dependencia ó de otra confiabilidad conjunta en la cual los tiempos latentes son independientes. Uno de los problemas centrales en el análisis de este tipo de datos, con el enfoque de tiempos latentes, es modelar la dependencia de los T_i . Una forma de atacar tal dificultad es utilizando una clase de funciones llamadas cópulas, que se presentan también en la sección 3.3, las cuales acoplan o establecen una relación entre la distribución multivariada y sus respectivas marginales.

3.1. Función de verosimilitud

Suponga que se cuenta con una muestra aleatoria de tamaño n , $\{(t_i, c_i)\}_{i=1}^n$, de un fenómeno de riesgos en competencia. La función de verosimilitud, que es función de los parámetros, es aproximada por el producto (debido a la independencia de los datos) de las probabilidades de observar cada (t_i, c_i) . A su vez, la probabilidad de observar el dato (t_i, c_i) suele aproximarse por la sub densidad evaluada en el punto, es decir, por $f_{T,C}(t_i, c_i)$.

Para el caso del enfoque bivariado, es usual proponer las funciones de sub confiabilidad, las cuales se derivan y se obtienen las sub densidades o, directamente proponer las sub densidades y construir la verosimilitud. Sin embargo, cuando se trabaja con el enfoque de tiempos latentes, lo usual es proponer una confiabilidad conjunta para los tiempos latentes y de la que se obtienen las sub densidades.

Sea $\bar{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{t})$ la confiabilidad conjunta del vector de tiempos latentes $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_k)$, esto es,

$$\bar{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2, \dots, T_k > t_k), \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in (\mathbb{R}^+)^k.$$

Con la notación anterior, el siguiente resultado nos dice la manera de obtener las sub densidades a partir de la confiabilidad conjunta de los tiempos latentes [31].

Teorema 3.1.1 *Sea $\bar{F}_{\mathbf{T}}$ la confiabilidad conjunta de \mathbf{T} , entonces se tiene que las derivadas de las funciones de sub confiabilidad coinciden con la derivada de la función de confiabilidad conjunta evaluada en $t_1 = t_2 = \dots = t_k = t$, es decir,*

$$\frac{d}{dt} \bar{F}_{T,C}(t, i) = \left. \frac{\partial}{\partial t_i} \bar{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) \right|_{t_1=t_2=\dots=t_k=t}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Demostración. Debido a que la numeración de los k riesgos es arbitraria, sin pérdida de generalidad, consideraremos $i = 1$. Sean $t, h^* \in \mathbb{R}^+$ y $0 < h < h^*$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{F}_{T,C}(t, 1) - \bar{F}_{T,C}(t+h, 1) &= P(T > t, C = 1) - P(T > t+h, C = 1) \\ &= P(T_1 > t, \cap_{j>1} \{T_j > T_1\}) - P(T_1 > t+h, \cap_{j>1} \{T_j > T_1\}) \\ &= P(t < T_1 \leq t+h, \cap_{j>1} \{T_j > T_1\}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

lo que tiene como cota inferior

$$P(t < T_1 \leq t+h, \cap_{j>1} \{T_j > t+h^*\}) = \bar{F}_{\mathbf{T}}(t, t+h^*, \dots, t+h^*) - \bar{F}_{\mathbf{T}}(t+h, t+h^*, \dots, t+h^*), \quad (3.2)$$

pues haciendo $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$, resulta

$$\begin{aligned} \omega \in \{t < T_1 \leq t+h, \cap_{j>1} \{T_j > t+h^*\}\} &\implies t < T_1(\omega_1) \leq t+h, \cap_{j>1} \{T_j(\omega_j) > t+h^*\} \\ &\implies t < T_1(\omega_1) \leq t+h, \cap_{j>1} \{T_j(\omega_j) > t+h\} \\ &\implies t < T_1(\omega_1) \leq t+h, \cap_{j>1} \{T_j(\omega_j) > T_1(\omega_1)\} \\ &\implies \omega \in \{t < T_1 \leq t+h, \cap_{j>1} \{T_j > T_1\}\}. \end{aligned}$$

Similarmente, una cota superior para (3.1) es

$$P(t < T_1 \leq t+h, \cap_{j>1} \{T_j > t\}) = \bar{F}_{\mathbf{T}}(t, \dots, t) - \bar{F}_{\mathbf{T}}(t+h, t, \dots, t), \quad (3.3)$$

pues

$$\begin{aligned} \omega \in \{t < T_1 \leq t+h, \cap_{j>1} \{T_j > T_1\}\} &\implies t < T_1(\omega_1) \leq t+h, \cap_{j>1} \{T_j(\omega_j) > T_1(\omega_1)\} \\ &\implies t < T_1(\omega_1) \leq t+h, \cap_{j>1} \{T_j(\omega_j) > t\} \\ &\implies \omega \in \{t < T_1 \leq t+h, \cap_{j>1} \{T_j > T_1\}\}. \end{aligned}$$

Así, dividiendo (3.1), (3.2) y (3.3) por h , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}_{\mathbf{T}}(t, t+h^*, \dots, t+h^*) - \bar{F}_{\mathbf{T}}(t+h, t+h^*, \dots, t+h^*)}{h} &\leq \frac{\bar{F}_{T,C}(t, 1) - \bar{F}_{T,C}(t+h, 1)}{h} \\ &\leq \frac{\bar{F}_{\mathbf{T}}(t, \dots, t) - \bar{F}_{\mathbf{T}}(t+h, t, \dots, t)}{h}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}_{\mathbf{T}}(t+h, t, \dots, t) - \bar{F}_{\mathbf{T}}(t, \dots, t)}{h} &\leq \frac{\bar{F}_{T,C}(t+h, 1) - \bar{F}_{T,C}(t, 1)}{h} \\ &\leq \frac{\bar{F}_{\mathbf{T}}(t+h, t+h^*, \dots, t+h^*) - \bar{F}_{\mathbf{T}}(t, t+h^*, \dots, t+h^*)}{h}. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$ se tiene que, para todo $h^* > 0$,

$$\left. \frac{\partial}{\partial t_1} \bar{F}_{\mathbf{T}}(t_1, \dots, t_k) \right|_{t_1=t, t_j=t+h^*, j>1} \leq \frac{d}{dt} \bar{F}_{T,C}(t, 1) \leq \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \bar{F}_{\mathbf{T}}(t_1, \dots, t_k) \right|_{t_j=t, j=1, \dots, k}.$$

Por último, haciendo $h^* \rightarrow 0$ resulta

$$\left. \frac{\partial}{\partial t_1} \bar{F}_{\mathbf{T}}(t_1, \dots, t_k) \right|_{t_j=t, j=1, \dots, k} \leq \frac{d}{dt} \bar{F}_{T,C}(t, 1) \leq \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \bar{F}_{\mathbf{T}}(t_1, \dots, t_k) \right|_{t_j=t, j=1, \dots, k},$$

es decir,

$$\frac{d}{dt} \bar{F}_{T,C}(t, 1) = \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \bar{F}_{\mathbf{T}}(t_1, \dots, t_k) \right|_{t_j=t, j=1, \dots, k}. \quad \square$$

En la práctica, los datos pueden estar censurados por la derecha por algún motivo independiente de los k modos de falla. Por ejemplo, la causa de la censura puede ser el tiempo límite del experimento. Si la i -ésima observación no es censurada, se observará el tiempo t_i y la causa c_i . Por otro lado, si la i -ésima observación es censurada por la derecha en el tiempo t_i , entonces no se observa c_i , la única información con la que se contará es que el tiempo de falla es mayor que t_i , es decir, $T > t_i$. Haciendo $\delta_i = 0$ si la i -ésima observación es censurada y $\delta_i = 1$ sino, la función de verosimilitud está dada por

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^n [f_{T,C}(t_i, c_i)]^{\delta_i} [\bar{F}_T(t_i)]^{1-\delta_i} \\ &= \prod_{i=1}^n [h_{T,C}(t_i, c_i)]^{\delta_i} \bar{F}_T(t_i), \text{ pues } h_{T,C}(t, i) = \frac{f_{T,C}(t, i)}{\bar{F}_T(t)}. \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores sugieren proponer modelos paramétricos para las funciones de sub densidad, sub riesgo o para la confiabilidad conjunta de los tiempos latentes, de la cual, por le Teorema 3.1.1, se pueden obtener las demás como sigue:

$$f_{T,C}(t, i) = - \left. \frac{\partial \bar{F}_{\mathbf{T}}(t_1, \dots, t_k)}{\partial t_i} \right|_{t_1=t_2=\dots=t_k=t}, \quad i = 1, \dots, k,$$

de donde se sigue que

$$h_{T,C}(t, i) = \frac{f(t, i)}{\bar{F}_T(t)} = - \left. \frac{\partial \log[\bar{F}_{\mathbf{T}}(t_1, \dots, t_k)]}{\partial t_i} \right|_{t_1=t_2=\dots=t_k=t}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.4)$$

Note que $\bar{F}_T(t)$ es la confiabilidad marginal de T en el vector (T, C) y que coincide con $\bar{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} = (t, t, \dots, t) \in (\mathbb{R}^+)^k$, que es la confiabilidad conjunta del vector de tiempos latentes.

3.2. Riesgos independientes

Una hipótesis clásica en el estudio de riesgos en competencia es asumir que los riesgos actúan en forma independiente, esto es, que un tipo de falla no tiene efecto sobre los demás. En varios contextos puede ser que asumir independencia entre los riesgos no sea muy adecuado, no obstante es útil estudiar estos sistemas ya que, por ejemplo, se identifican efectos debidos a la falta de independencia. En primera instancia, es claro que cuando los riesgos son independientes, el conjunto de confiabilidades marginales $\bar{F}_{T_i}(t)$ determinan la confiabilidad conjunta $\bar{F}_{\mathbf{T}}$ como

$$\bar{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^k \bar{F}_{T_i}(t_i).$$

Sea $\bar{F}_{T_i}(t)$ la confiabilidad marginal de T_i y sea $h_{T_i}(t) = -\frac{\partial \log[\bar{F}_{T_i}(t)]}{\partial t}$ la correspondiente función de riesgo. Es de notar que, en general, $h_{T_i}(t)$ y $h_{T,C}(t, i)$ son diferentes y tienen distintas interpretaciones, pero sucede que $h_{T_i}(t) = h(t, i)$ para todo $t > 0$ cuando los T_i son independientes.

El siguiente resultado proporciona algunas implicaciones de asumir riesgos independientes, en particular, muestra que la confiabilidad marginal no observable $\bar{F}_{T_i}(t)$ se puede obtener explícitamente de la sub confiabilidad observable $\bar{F}_{T,C}(t, i)$.

Teorema 3.2.1 (Gail, 1975) *Las implicaciones (i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (iv) se tienen para las siguientes proposiciones:*

(i) *Asumir riesgos independientes;*

(ii) $h_{T,C}(t, i) = h_{T_i}(t)$, $i = 1, 2, \dots, k$, $t > 0$;

(iii) *El conjunto de las funciones de sub confiabilidad $\bar{F}_{T,C}(t, i)$ determina el conjunto de confiabilidades marginales $\bar{F}_{T_i}(t)$, explícitamente,*

$$\bar{F}_{T_i}(t) = \exp \left[- \int_0^t h_{T,C}(x, i) dx \right]; \quad (3.5)$$

(iv) $\bar{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^k \bar{F}_{T_i}(t)$, $\mathbf{t} = (t, t, \dots, t)$.

Demostración.

(i) \implies (ii). Ya que los tiempos latentes son independientes, se tiene que $\bar{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^k \bar{F}_{T_i}(t_i)$, con $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$, de donde $\log[\bar{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{t})] = \sum_{i=1}^k \log[\bar{F}_{T_i}(t_i)]$. Derivando con respecto a t_j y evaluando en $\mathbf{t} = (t, t, \dots, t)$,

$$\begin{aligned} h_{T,C}(t, j) &= -\frac{\partial}{\partial t_j} \log[\bar{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{t})] \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_k=t}, \text{ por (3.4)} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t_j} \sum_{i=1}^k \log[\bar{F}_{T_i}(t_i)] \Big|_{t_j=t} \\ &= h_{T_j}(t), \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \end{aligned}$$

que es (ii).

(ii) \implies (iii). De la segunda ecuación anterior se tiene que $h_{T,C}(t, j) = -\frac{d}{dt_j} \log[\bar{F}_{T_i}(t_i)] \Big|_{t_j=t}$,

de donde $\bar{F}_{T_j}(t) = \exp \left[- \int_0^t h_{T,C}(x, j) dx \right]$, lo que implica que el conjunto de confiabilidades marginales $\bar{F}_{T_i}(t)$ está determinado por el conjunto de las funciones de sub

riesgo $h_{T,C}(t, i)$ o equivalentemente, por $\bar{F}_{T,C}(t, i)$, pues $h_{T,C}(t, i) = \frac{f_{T,C}(t, i)}{\prod_{j=1}^k \bar{F}_{T,C}(t, j)}$,

con $f_{T,C}(t, i) = -\frac{d}{dt} \bar{F}_{T,C}(t, i)$.

(iii) \implies (iv). Con base en (3.5)

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \bar{F}_{T_i}(t) &= \exp \left[-\sum_{i=1}^k \int_0^t h_{T,C}(x, i) dx \right] \\ &= \exp \left[-\sum_{i=1}^k \int_0^t h_{T_i}(x) dx \right] \\ &= \exp \left[-\int_0^t h_T(x) dx \right] \\ &= \bar{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} = (t, t, \dots, t). \quad \square \end{aligned}$$

La parte (iv) del teorema pareciera que establece la independencia de los T_i pero no es así, ya que la igualdad es en $\mathbf{t} = (t, t, \dots, t)$ (sobre la diagonal) y para la independencia se requeriría la igualdad de $\bar{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{t})$ y $\prod_{i=1}^k \bar{F}_{T_i}(t_i)$ para todo $\mathbf{t} \in (\mathbb{R}^+)^k$.

3.2.1. Estimador Kaplan-Meier

En general, cuando se trabaja con tiempos de falla asociados con censura por la derecha y se asume que dichos tiempos, de falla y censura, son independientes, un estimador no paramétrico mencionado fuertemente en la literatura para la función de confiabilidad o supervivencia de los tiempos de falla es el estimador de Kaplan-Meier (Product Limit Estimator) [17].

Para calcular el estimador, considere t_1, t_2, \dots, t_k como tiempos observados de falla en una muestra aleatoria de tamaño $n = n_0$ que provienen de una población homogénea con función de confiabilidad desconocida \bar{F} . Suponga que en t_j fallan d_j componentes y denote a n_j como el número de componentes en riesgo justo antes de t_j . Con base en lo anterior, el estimador es

$$\hat{\bar{F}}(t) = \prod_{j|t_j < t} \frac{n_j - d_j}{n_j}, \quad t > 0.$$

3.3. Riesgos dependientes

Como se mencionó en la sección anterior, en muchas ocasiones la hipótesis de independencia no es adecuada por las características del fenómeno que se está modelando, lo que da origen al problema de no identificabilidad. El problema que se aborda en esta sección es el de modelar los tiempos latentes cuando presentan dependencia. Durante gran tiempo los estadísticos han estado interesados en la relación de una distribución multivariada y sus marginales (univariadas o de mayor dimensión). Una solución a este problema fue presentada en 1959 por Sklar creando una nueva clase de funciones denominadas cópulas. El estudio de las cópulas y sus aplicaciones en estadística es relativamente reciente, hasta hace poco, era difícil localizar la palabra *cópula* en la literatura estadística. Antes de 1997 no había un espacio para *las cópulas* en la Enciclopedia de Ciencias Estadísticas (*Encyclopedia of Statistical Sciences*) ni en los suplementos. La evidencia del creciente interés de las cópulas y sus aplicaciones en estadística y probabilidad en los pasados 15 años se materializa en 1990 cuando en Roma se realiza el *Simposio de Distribuciones con Marginales Dadas (Clases Fréchet)* [25].

En esta sección se presenta a las cópulas como una forma de modelar la dependencia de los tiempos latentes que dan lugar a los datos de riesgos en competencia. Como se verá en el Capítulo 4, en [32] se establece que si la función cópula es conocida y completamente especificada, entonces los datos de riesgos en competencia son suficientes para estimar las confiabilidades marginales de una forma consistente, es decir, sin el problema de identificabilidad. Cuando hay independencia, esta estimación se reduce a la obtenida utilizando Kaplan-Meier.

3.3.1. Cópulas

Ya que se ha establecido la importancia de las cópulas para el estudio de la dependencia entre variables, empezaremos por definir las en forma precisa.

Definición 3.3.1 (Cuasi-inversa) Sea F una función de distribución. La cuasi-inversa de F es una función $F^{(-1)}$ con dominio en $\mathbf{I} \equiv [0, 1]$ tal que

1. Si t está en $\text{Ran}F$, entonces $F^{(-1)}(t)$ es cualquier número x en $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = t$, es decir, para todo t en $\text{Ran}F$,

$$F(F^{(-1)}(t)) = t;$$

2. Si t no está en $\text{Ran}F$, entonces

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x \mid F(x) \geq t\} = \sup\{x \mid F(x) \leq t\}.$$

Definición 3.3.2 (Cópula) Sean X y Y variables aleatorias con funciones de distribución F_X y F_Y , respectivamente y $F_{X,Y}$ la función de distribución conjunta de (X, Y) . La cópula C de X y Y se define como

$$C(u, v) = F_{X,Y}(F_X^{(-1)}(u), F_Y^{(-1)}(v)), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Observe de que $C(\cdot, \cdot)$ es en sí una función de distribución bivariada en el cuadrado unitario con marginales uniformes. Bajo independencia, la cópula es $C(u, v) = uv$. Los valores de cualquier cópula están entre $\max\{u + v - 1, 0\}$ y $\min\{u, v\}$, ver [25].

El hecho de que la cópula captura la estructura básica de dependencia entre X y Y se puede ver en el siguiente resultado, que es el teorema central en teoría de cópulas y es el fundamento de muchas aplicaciones en la teoría estadística.

Teorema 3.3.1 (Sklar) Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G . Entonces existe una cópula C tal que para todo x, y en \mathbb{R} ,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (3.6)$$

Si F y G son continuas, entonces C es única; de otra forma, C está determinada en forma única en $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$. Inversamente, si C es una cópula y F y G son funciones de distribución, entonces la función H definida por (3.6) es una función de distribución con marginales F y G .

El nombre de “cópula” enfatiza el hecho de que la cópula “acopla” una distribución conjunta con sus marginales univariadas. A manera de ejemplo, en (3.7) se presenta la expresión para la cópula Gamma y en la Figura 3.1 se presenta la simulación de una muestra aleatoria de tamaño 500 con $\alpha = 3$. Se observa que existe una fuerte asociación para valores grandes de las dos variables ya que, como se aprecia en la esquina superior derecha, los puntos parecen aglomerarse.

$$C(u, v) = u + v - 1 + \left[\left(\frac{1}{1-u} \right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{1-v} \right)^{\alpha-1} \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}}, \quad u, v \in [0, 1], \alpha \geq 1. \quad (3.7)$$

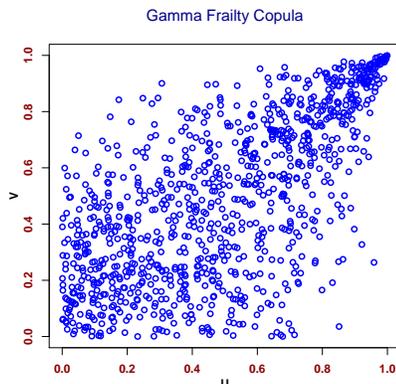


Figura 3.1: Muestra de tamaño 500 de la cópula Gamma.

3.3.2. Dependencia

La relación de dependencia entre dos variables aleatorias es uno de los tópicos más estudiados en probabilidad y estadística. La naturaleza de dependencia puede tomar una gran variedad de formas y, a menos de que no se hagan ciertas hipótesis acerca de la dependencia, ningún modelo estadístico puede ser considerado significativamente... [16]

Aquí se precisará la forma en la que se puede estudiar la dependencia o asociación entre dos variables aleatorias mediante el uso de cópulas, la cual es un poco más general que la medida usual de correlación, para lo cual se utilizará el concepto de concordancia entre dos variables aleatorias. Intuitivamente se puede pensar que un par de variables aleatorias son concordantes si “grandes” valores de una tienden a estar asociados con “grandes” valores de la otra y, en forma análoga, “pequeños” valores de una tienden a estar asociados con “pequeños” valores de la otra. Para ser más precisos, sean (x_i, y_i) y (x_j, y_j) dos observaciones del vector aleatorio (X, Y) . Se dirá que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son *concordantes* si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ y *discordantes* si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

τ de Kendall

A partir del concepto concordancia, se puede establecer una medida de asociación conocida como la τ de Kendall. La versión muestral de esta medida está definida en términos de concordancia como sigue. Sea $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ una muestra aleatoria de tamaño n del vector aleatorio continuo (X, Y) . Se tienen $\binom{n}{2}$ pares distintos de observaciones (x_i, y_i) y (x_j, y_j) en la muestra, y cada par es concordante o discordante. Sea c el número de pares concordantes y d el número de pares discordantes. Entonces la τ de Kendall para la muestra está definido por

$$t = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{\binom{n}{2}}. \quad (3.8)$$

De (3.8) se tiene que t es la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia para un par de observaciones (x_i, y_i) y (x_j, y_j) que son escogidas aleatoriamente de la muestra.

Cuando se presenta el caso en que $(x_i = x_j)$ o $(y_i = y_j)$ debido a la resolución de la escala con la cual se coleccionan los datos, se dice que hay “empate”, los cuales no son considerados

como concordancias o discordancias. En este caso, el denominador $\binom{n}{2}$ de (3.8) es reemplazado por

$$\sqrt{\left[\binom{n}{2} - n_x\right] \left[\binom{n}{2} - n_y\right]},$$

donde n_x y n_y son el número de empates que involucran a X y a Y , respectivamente.

La versión poblacional de la τ de Kendall para un vector (X, Y) de variables aleatorias continuas con distribución conjunta H es definida similarmente: sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos con distribución H . Entonces la τ es definida como la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia, es decir

$$\tau \equiv \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Para mostrar el papel que las cópulas juegan en la concordancia y medidas de asociación como la τ de Kendall, primero se definirá lo que es una “función de concordancia” Q , la cual es la diferencia de las probabilidades de concordancia y discordancia entre dos vectores (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) de variables aleatorias continuas con (posiblemente) diferentes distribuciones conjuntas H_1 y H_2 , pero con marginales comunes F y G . El siguiente resultado muestra que esta función depende de las distribuciones de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) solamente por medio de sus cópulas [25].

Teorema 3.3.2 Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios independientes con distribución H_1 y H_2 , respectivamente, y con marginales comunes F (de X_1 y X_2) y G (de Y_1 y Y_2). Sean C_1 y C_2 las cópulas de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) , respectivamente, de tal forma que $H_1(x, y) = C_1[F(x), G(y)]$ y $H_2(x, y) = C_2[F(x), G(y)]$. Sea Q la diferencia de las probabilidades de concordancia y discordancia de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) , es decir, sea

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Entonces

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int \int_{\mathcal{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1.$$

En el caso de que los vectores (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) tengan la misma distribución conjunta, la medida de asociación será la τ de Kendall y dependerá solamente de la cópula asociada, como lo muestra el siguiente teorema [25].

Teorema 3.3.3 Sean X y Y vectores aleatorios continuos cuya cópula es C . Entonces la versión poblacional de la τ de Kendall para X y Y está dada por

$$\tau_{X,Y} = Q(C, C) = 4 \int \int_{\mathcal{I}^2} C(u, v) dC(u, v) - 1.$$

3.3.3. Cópulas Arquimedianas

En esta parte se presentará brevemente una clase importante de cópulas conocida como *Cópulas Arquimedianas*, las cuales tienen un gran rango de aplicaciones por diferentes razones, entre las que se encuentran:

- La facilidad con la cual pueden ser construidas.
- La gran variedad de familias que pertenecen a la clase.
- Las propiedades que poseen los elementos de la clase.

Las cópulas arquimedianas no aparecieron originalmente en estadística, sino en el estudio de espacios métricos probabilísticos, donde fueron estudiadas como parte del desarrollo de una versión probabilística de la desigualdad del triángulo. Para precisar la forma de estas cópulas, se necesitará la definición de pseudo inversa de una función especial. Enseguida se muestra la definición de pseudo inversa de una función y posteriormente un resultado que caracteriza a las cópulas arquimedianas.

Definición 3.3.3 (Pseudo inversa) Sea $\phi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ una función continua y estrictamente decreciente tal que $\phi(1) = 0$. La pseudo inversa de ϕ es la función $\phi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow \mathbf{I}$ definida como

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \phi(0), \\ 0, & \phi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (3.9)$$

Lema 3.3.1 Sea $\phi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ una función continua estrictamente decreciente tal que $\phi(1) = 0$ y sea $\phi^{[-1]}$ la pseudo inversa de ϕ definida por (3.9). Sea $C : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$ definida por

$$C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v)), \quad u, v \in \mathbf{I}. \quad (3.10)$$

Entonces C satisface las siguientes condiciones para una cópula

$$\begin{aligned} C(u, 0) &= C(0, v) = 0, \\ C(u, 1) &= u \text{ y } C(1, v) = v, \quad u, v \in \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Con base en el Lema anterior, el siguiente teorema caracteriza a las cópulas Arquimedianas pidiendo una característica adicional a la función ϕ , que es la *convexidad*.

Teorema 3.3.4 (Definición de cópula Arquimediana) Como en la Definición 3.3.3, sea $\phi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\phi(1) = 0$ y $\phi^{[-1]}$ la pseudo inversa de ϕ . Entonces la función $C : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$ dada por (3.10) es una cópula si y sólo si ϕ es convexa.

Cópulas de la forma (3.10) son llamadas *cópulas Arquimedianas*. La función ϕ es llamada *generador* de la cópula. Si $\phi(0) = \infty$, decimos que ϕ es un generador *estricto*. En este caso $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$ y $C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$ es llamada *cópula Arquimediana estricta*.

Ejemplo. Considere $\phi(t) = [-\log(t)]^\alpha$, $\alpha \geq 1$, $t \in [0, 1]$. Debido a que $\phi(0) = \infty$, ϕ es estricta, lo que implica que $\phi^{[-1]}(t) = \phi^{-1}(t) = \exp(-t^{\frac{1}{\alpha}})$ y generando C mediante (3.10) se tiene

$$C(u, v) = \exp \left\{ - [(-\log(u))^\alpha + (-\log(v))^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \quad \alpha \geq 1,$$

la cual es la cópula Arquimediana Gumbel-Hougaard.

Una de las propiedades de ésta clase de cópulas es la relación que hay entre τ de Kendall y la cópula a través de su generador, como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 3.3.1 (Del teorema (3.3.3)) Sean X y Y variables aleatorias con cópula Arquimediana C y generador ϕ . La versión poblacional de la τ de Kendall para X y Y está dada por

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt. \quad (3.11)$$

3.4. El problema de no identificabilidad

Como se ha mencionado, uno de los principales intereses en el estudio de riesgos en competencia es obtener la distribución de (T, C) así como de sus marginales y, en su caso, de la distribución conjunta de los tiempos latentes. Sin embargo, el problema clásico de riesgos en competencia es que la distribución de (T, C) , en general, no determina la distribución de los

tiempos latentes de falla. Esto significa que puede haber diferentes distribuciones conjuntas de (T_1, T_2, \dots, T_k) de las cuales se obtienen las mismas sub confiabilidades para (T, C) .

En [7] se consideraron muestras aleatorias con dos riesgos ($k = 2$), es decir, cada observación de (T, C) proviene de una distribución bivariada de tiempos latentes y los vectores concernientes (T_1, T_2) son independientes e idénticamente distribuidos. Cox mostró que ningunos datos de este tipo pueden ser inconsistentes con un modelo de riesgos independientes. Lo anterior se generaliza en el siguiente resultado.

Teorema 3.4.1 (Tsiatis, 1975) *Suponga que $\bar{F}_{T,C}(t, i), i = 1, 2, \dots, k$ están dadas por algún modelo con riesgos dependientes. Entonces existe un único modelo con riesgos independientes que proporcionan las mismas sub confiabilidades $\bar{F}_{T,C}(t, i), i = 1, 2, \dots, k$. Este modelo está dado por*

$$\bar{F}_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^k \bar{F}_{T_i}^*(t_i), \quad \text{donde} \quad \bar{F}_{T_i}^*(t_i) = \exp \left[- \int_0^t h_{T,C}(x, i) dx \right]$$

y las funciones de sub riesgo $h_{T,C}(t, i)$ se obtienen a partir de $\bar{F}_{T,C}(t, i)$.

El teorema anterior nos dice que, como se había comentado, con base en las observaciones de (T, C) no se puede discernir si los riesgos son independientes o no.

El problema de no identificabilidad se ilustrará de la siguiente manera. Suponga que en cierto sistema se presentan dos tipos de falla, que el sistema deja de funcionar cuando se presenta la primera y además se tiene conocimiento de la función de confiabilidad conjunta de los tiempos de falla [15], la cual es

$$\begin{aligned} \bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2) &= P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) \\ &= \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2), \quad \lambda > 0, \mu > 0, \nu \in [0, 1], t_1 > 0, t_2 > 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Para tal ilustración, el plan a seguir es:

1. Usando la confiabilidad conjunta \bar{F}_{T_1, T_2} , se calcularán en forma explícita las dos sub confiabilidades $\bar{F}_{T,C}(t, 1)$ y $\bar{F}_{T,C}(t, 2)$.
2. Con base en el Teorema 3.4.1 se calculará la confiabilidad conjunta \bar{F}_{T_1, T_2}^* , donde los tiempos o riesgos son independientes y se construirán las sub confiabilidades $\bar{F}_{T,C}^*(t, 1)$ y $\bar{F}_{T,C}^*(t, 2)$.
3. Por último, se compararán las sub confiabilidades obtenidas a partir de \bar{F}_{T_1, T_2} y de \bar{F}_{T_1, T_2}^* .

Con base en (3.12), la densidad conjunta está dada por

$$\begin{aligned} f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} \bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} [-(\lambda + \nu t_2) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2)] \\ &= - \left[(\lambda + \nu t_2) \frac{\partial}{\partial t_2} \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) + \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) \frac{\partial}{\partial t_2} (\lambda + \nu t_2) \right] \\ &= - [(\lambda + \nu t_2)(-\mu - \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) + \nu \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2)] \\ &= [(\lambda + \nu t_2)(\mu + \nu t_1) - \nu] \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por definición y con base en (3.13), la sub confiabilidad está dada por

$$\begin{aligned}\bar{F}_{T,C}(t, 1) &= P(T > t, C = 1) \\ &= P(T_1 > t, T_2 > t, T_1 \leq T_2) \\ &= \int_t^\infty \int_t^{t_1} f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) dt_2 dt_1.\end{aligned}$$

Se calcula la integral interior.

$$\begin{aligned}\int_t^{t_1} f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) dt_2 &= \int_t^{t_1} [(\lambda + \nu t_2)(\mu + \nu t_1) - \nu] \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 \\ &= \int_t^{t_1} (\lambda + \nu t_2)(\mu + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 \\ &\quad - \int_t^{t_1} \nu \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Para la primera integral se utiliza integración por partes. Se tiene que

$$\begin{aligned}u = \lambda + \nu t_2 &\implies du = \nu dt_2 \\ dv = (\mu + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 &\implies v = -\exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2),\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_t^{t_1} (\lambda + \nu t_2)(\mu + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 &= -(\lambda + \nu t_2) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) \Big|_t^{t_1} \\ &\quad + \int_t^{t_1} \nu \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 \\ &= (\lambda + \nu t) \exp(-\lambda t_1 - \mu t - \nu t_1 t) \\ &\quad - (\lambda + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_1 - \nu t_1^2) \\ &\quad + \int_t^{t_1} \nu \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2.\end{aligned}$$

Así, con base en lo anterior y de (3.14), se obtiene

$$\begin{aligned}\int_t^{t_1} f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) dt_2 &= (\lambda + \nu t) \exp(-\lambda t_1 - \mu t - \nu t_1 t) - (\lambda + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_1 - \nu t_1^2) \\ &\quad + \int_t^{t_1} \nu \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 - \int_t^{t_1} \nu \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 \\ &= (\lambda + \nu t) \exp(-\lambda t_1 - \mu t - \nu t_1 t) - (\lambda + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_1 - \nu t_1^2).\end{aligned}$$

De la última igualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned}\int_t^\infty \int_t^{t_1} f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) dt_2 dt_1 &= \int_t^\infty (\lambda + \nu t) \exp(-\lambda t_1 - \mu t - \nu t_1 t) dt_1 \\ &\quad - \int_t^\infty (\lambda + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_1 - \nu t_1^2) dt_1 \\ &= -\exp(-\lambda t_1 - \mu t - \nu t_1 t) \Big|_t^\infty \\ &\quad - \int_t^\infty h(t_1) dt_1, \quad h(t_1) \equiv (\lambda + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_1 - \nu t_1^2) \\ &= \exp(-\lambda t - \mu t - \nu t^2) - \int_t^\infty h(t_1) dt_1.\end{aligned}$$

Así,

$$\bar{F}_{T,C}(t, 1) = \exp(-\lambda t - \mu t - \nu t^2) - \int_t^\infty h(t_1) dt_1. \quad (3.15)$$

En forma similar se calcula la otra sub confiabilidad. Por definición

$$\begin{aligned} \bar{F}_{T,C}(t, 2) &= P(T > t, C = 2) \\ &= P(T > t, T_2 < T_1) \\ &= P(T_1 > t, T_2 > t, T_2 < T_1) \\ &= \int_t^\infty \int_{t_1}^\infty f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) dt_2 dt_1. \end{aligned}$$

Se calcula la integral interior.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^\infty f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) dt_2 &= \int_{t_1}^\infty [(\lambda + \nu t_2)(\mu + \nu t_1) - \nu] \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 \\ &= \int_{t_1}^\infty (\lambda + \nu t_2)(\mu + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 \\ &\quad - \int_{t_1}^\infty \nu \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para la primera integral se utiliza integración por partes. Se tiene que

$$u = \lambda + \nu t_2 \implies du = \nu dt_2$$

$$dv = (\mu + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 \implies v = -\exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2),$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^\infty (\lambda + \nu t_2)(\mu + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 &= -(\lambda + \nu t_2) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) \Big|_{t_1}^\infty \\ &\quad + \int_{t_1}^\infty \nu \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 \\ &= (\lambda + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_1 - \nu t_1^2) \\ &\quad + \int_{t_1}^\infty \nu \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2. \end{aligned}$$

Así, con base en lo anterior y de (3.16), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^\infty f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) dt_2 &= (\lambda + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_1 - \nu t_1^2) + \int_{t_1}^\infty \nu \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 \\ &\quad - \int_{t_1}^\infty \nu \exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) dt_2 \\ &= (\lambda + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_1 - \nu t_1^2). \end{aligned}$$

De la última igualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \int_{t_1}^\infty f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) dt_2 dt_1 &= \int_t^\infty (\lambda + \nu t_1) \exp(-\lambda t_1 - \mu t_1 - \nu t_1^2) dt_1 \\ &= \int_t^\infty h(t_1) dt_1, \end{aligned}$$

de modo que

$$\bar{F}_{T,C}(t, 2) = \int_t^\infty h(t_1) dt_1. \quad (3.17)$$

Ahora se procede a construir el modelo de confiabilidad conjunta que se establece en [31], donde los tiempos latentes de falla son independiente y dan lugar a las mismas sub confiabilidades.

De (3.12), las funciones de sub riesgo están dadas por

$$\begin{aligned}
h_{T,C}(t, 1) &= - \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \log[\bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2)] \right|_{t_1=t_2=t} \\
&= - \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \log[\exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2)] \right|_{t_1=t_2=t} \\
&= - \left. \frac{\partial}{\partial t_1} (-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) \right|_{t_1=t_2=t} \\
&= \lambda + \nu t,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
h_{T,C}(t, 2) &= - \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \log[\bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2)] \right|_{t_1=t_2=t} \\
&= - \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \log[\exp(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2)] \right|_{t_1=t_2=t} \\
&= - \left. \frac{\partial}{\partial t_2} (-\lambda t_1 - \mu t_2 - \nu t_1 t_2) \right|_{t_1=t_2=t} \\
&= \mu + \nu t.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Así, con base en (3.18) y (3.19), las confiabilidades marginales de los tiempos latentes están dadas por

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{T_1}^*(t) &= \exp\left(-\int_0^t h_{T,C}(u, 1) du\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^t (\lambda + \nu u) du\right) \\
&= \exp\left(-\lambda t - \frac{1}{2}\nu t^2\right), \\
\bar{F}_{T_2}^*(t) &= \exp\left(-\int_0^t h_{T,C}(u, 2) du\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^t (\mu + \nu u) du\right) \\
&= \exp\left(-\mu t - \frac{1}{2}\nu t^2\right),
\end{aligned}$$

de donde, por independencia, la confiabilidad conjunta es

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{T_1, T_2}^*(t_1, t_2) &= \bar{F}_{T_1}^*(t_1) \bar{F}_{T_2}^*(t_2) \\
&= \exp\left(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \frac{1}{2}\nu t_1^2 - \frac{1}{2}\nu t_2^2\right), \quad \lambda > 0, \mu > 0, \nu \in [0, 1], t_1 > 0, t_2 > 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Con base en (3.20), la densidad conjunta está dada por

$$\begin{aligned} f_{T_1, T_2}^*(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} \bar{F}_{T_1, T_2}^*(t_1, t_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} \left[(-\lambda - \nu t_1) \exp \left(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \frac{1}{2} \nu t_1^2 - \frac{1}{2} \nu t_2^2 \right) \right] \\ &= (\lambda + \nu t_1)(\mu + \nu t_2) \exp \left(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \frac{1}{2} \nu t_1^2 - \frac{1}{2} \nu t_2^2 \right). \end{aligned}$$

Se procede a calcular las sub confiabilidades.

$$\begin{aligned} \bar{F}_{T, C}^*(t, 1) &= P(T > t, C = 1) \\ &= P(T > t, T_1 < T_2) \\ &= P(T_1 > t, T_2 > t, T_1 < T_2) \\ &= \int_t^\infty \int_t^{t_1} f_{T_1, T_2}^*(t_1, t_2) dt_2 dt_1. \end{aligned}$$

Se calcula la integral interior.

$$\begin{aligned} \int_t^{t_1} f_{T_1, T_2}^*(t_1, t_2) dt_2 &= \int_t^{t_1} (\lambda + \nu t_1)(\mu + \nu t_2) \exp \left(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \frac{1}{2} \nu t_1^2 - \frac{1}{2} \nu t_2^2 \right) dt_2 \\ &= (\lambda + \nu t_1) \exp \left(-\lambda t_1 - \frac{1}{2} \nu t_1^2 \right) \int_t^{t_1} (\mu + \nu t_2) \exp \left(-\mu t_2 - \frac{1}{2} \nu t_2^2 \right) dt_2 \\ &= -(\lambda + \nu t_1) \exp \left(-\lambda t_1 - \frac{1}{2} \nu t_1^2 \right) \left[\exp \left(-\mu t_2 - \frac{1}{2} \nu t_2^2 \right) \right]_t^{t_1} \\ &= (\lambda + \nu t_1) \exp \left(-\lambda t_1 - \frac{1}{2} \nu t_1^2 \right) \left[\exp \left(-\mu t - \frac{1}{2} \nu t^2 \right) - \exp \left(-\mu t_1 - \frac{1}{2} \nu t_1^2 \right) \right] \\ &= (\lambda + \nu t_1) \exp \left(-\lambda t_1 - \mu t - \frac{1}{2} \nu t_1^2 - \frac{1}{2} \nu t^2 \right) - (\lambda + \nu t_1) \exp \left(-\lambda t_1 - \mu t_1 - \nu t_1^2 \right). \end{aligned}$$

De la última igualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \int_t^{t_1} f_{T_1, T_2}^*(t_1, t_2) dt_2 dt_1 &= \int_t^\infty \left[(\lambda + \nu t_1) \exp \left(-\lambda t_1 - \mu t - \frac{1}{2} \nu t_1^2 - \frac{1}{2} \nu t^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - (\lambda + \nu t_1) \exp \left(-\lambda t_1 - \mu t_1 - \nu t_1^2 \right) \right] dt_1 \\ &= \exp \left(-\mu t - \frac{1}{2} \nu t^2 \right) \int_t^\infty (\lambda + \nu t_1) \exp \left(-\lambda t_1 - \frac{1}{2} \nu t_1^2 \right) dt_1 - \int_t^\infty h(t_1) dt_1 \\ &= -\exp \left(-\mu t - \frac{1}{2} \nu t^2 \right) \exp \left(-\lambda t_1 - \frac{1}{2} \nu t_1^2 \right) \Big|_t^\infty - \int_t^\infty h(t_1) dt_1 \\ &= \exp \left(-\mu t - \lambda t - \nu t^2 \right) - \int_t^\infty h(t_1) dt_1. \end{aligned}$$

Así,

$$\bar{F}_{T, C}^*(t, 1) = \exp \left(-\mu t - \lambda t - \nu t^2 \right) - \int_t^\infty h(t_1) dt_1. \quad (3.21)$$

En forma similar se calcula la otra sub distribución restante.

$$\begin{aligned} \bar{F}_{T, C}^*(t, 2) &= P(T > t, C = 2) \\ &= P(T > t, T_2 < T_1) \\ &= P(T_1 > t, T_2 > t, T_2 < T_1) \\ &= \int_t^\infty \int_{t_1}^\infty f_{T_1, T_2}^*(t_1, t_2) dt_2 dt_1. \end{aligned}$$

Se calcula la integral interior.

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{\infty} f_{T_1, T_2}^*(t_1, t_2) dt_2 &= \int_{t_1}^{\infty} (\lambda + \nu t_1)(\mu + \nu t_2) \exp\left(-\lambda t_1 - \mu t_2 - \frac{1}{2}\nu t_1^2 - \frac{1}{2}\nu t_2^2\right) dt_2 \\
&= (\lambda + \nu t_1) \exp\left(-\lambda t_1 - \frac{1}{2}\nu t_1^2\right) \int_{t_1}^{\infty} (\mu + \nu t_2) \exp\left(-\mu t_2 - \frac{1}{2}\nu t_2^2\right) dt_2 \\
&= -(\lambda + \nu t_1) \exp\left(-\lambda t_1 - \frac{1}{2}\nu t_1^2\right) \left[\exp\left(-\mu t_2 - \frac{1}{2}\nu t_2^2\right)\right]_{t_1}^{\infty} \\
&= (\lambda + \nu t_1) \exp\left(-\lambda t_1 - \frac{1}{2}\nu t_1^2\right) \exp\left(-\mu t_1 - \frac{1}{2}\nu t_1^2\right) \\
&= (\lambda + \nu t_1) \exp\left(-\lambda t_1 - \mu t_1 - \nu t_1^2\right).
\end{aligned}$$

De la igualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\int_t^{\infty} \int_{t_1}^{\infty} f_{T_1, T_2}^*(t_1, t_2) dt_2 dt_1 &= \int_t^{\infty} (\lambda + \nu t_1) \exp\left(-\lambda t_1 - \mu t_1 - \nu t_1^2\right) dt_1 \\
&= \int_t^{\infty} h(t_1) dt_1,
\end{aligned}$$

de donde,

$$\bar{F}_{T,C}^*(t, 2) = \int_t^{\infty} h(t_1) dt_1, \quad (3.22)$$

Se comparan las sub confiabilidades obtenidas a partir de (3.12) y (3.20), respectivamente:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{T,C}(t, 1) &= \int_t^{\infty} h(t_1) dt_1, \\
\bar{F}_{T,C}(t, 2) &= \exp(-\lambda t - \mu t - \nu t^2) - \int_t^{\infty} h(t_1) dt_1, \\
\bar{F}_{T,C}^*(t, 1) &= \int_t^{\infty} h(t_1) dt_1, \\
\bar{F}_{T,C}^*(t, 2) &= \exp(-\lambda t - \mu t - \nu t^2) - \int_t^{\infty} h(t_1) dt_1.
\end{aligned}$$

De lo anterior se observa que las sub confiabilidades derivadas de los modelos de confiabilidad conjunta distintos (3.12) y (3.20) son iguales, de donde se concluye que utilizando solamente los datos de riesgos en competencia de la forma (T, C) no es posible seleccionar alguno de los dos modelos.

3.5. Ejemplo

Para ilustrar una forma en que se pueden analizar datos de riesgos en competencia utilizando lo desarrollado hasta el momento, se utilizará el conjunto de datos presentados en [26] los cuales consisten en tiempos de vida de componentes eléctricos con sus causas asociadas de falla. Los tiempos de vida censurados por la derecha son indicados como la causa de falla 0.

Para fines prácticos, se propone un modelo de mezcla exponencial y nos enfocaremos solamente en la causa 9, la cual se etiquetará como causa 1 y las demás, excepto los tiempos censurados, como causa 2 [10]. Dicho modelo de mezcla tiene funciones de sub confiabilidad dadas por

$$\bar{F}_{T,C}(t, i) = \pi_i \exp(-\lambda_i t), \quad \pi_i \in [0, 1], \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad t > 0,$$

11	1	35	15	49	15	170	6	329	6	381	6	708	6	958	10
1062	5	1167	9	1594	2	1925	9	1990	9	2223	9	2327	6	2400	9
2451	5	2471	9	2551	9	2565	0	2568	9	2694	9	2702	10	2761	6
2831	2	3034	9	3059	6	3112	9	3214	9	3478	9	3504	9	4329	9
6367	0	6976	9	7846	9	13403	0								

Tabla 3.1: Tiempos de falla y causa (T, C) para 36 componentes eléctricos [26].

de las que se obtienen las siguientes sub densidades y confiabilidad marginal de T :

$$\begin{aligned}
 f_{T,C}(t, i) &= -\frac{d}{dt} \bar{F}_{T,C}(t, i), \\
 &= \pi_i \lambda_i \exp(-\lambda_i t), \quad i = 1, 2, \\
 \bar{F}_T(t) &= \sum_{i=1}^2 \bar{F}_{T,C}(t, i) \\
 &= \pi_1 \exp(-\lambda_1 t) + \pi_2 \exp(-\lambda_2 t) \\
 &= \pi_1 \exp(-\lambda_1 t) + (1 - \pi_1) \exp(-\lambda_2 t), \quad \text{pues } \pi_1 + \pi_2 = 1.
 \end{aligned}$$

Los tiempos observados de falla fueron escalados por un factor de 0.001, lo anterior para lograr estabilidad en las estimaciones de los parámetros. Así, asumiendo que los datos $\mathbf{t} = \{(t_i, c_i)\}_{i=1}^n$ son independientes y considerando $\theta \equiv (\pi_1, \lambda_1, \lambda_2)$, se tiene que la log verosimilitud está dada por

$$\begin{aligned}
 l(\theta; \mathbf{t}) &= \sum_{i=1}^{n_1} \log[f_{T,C}(t_{i1}, 1)] + \sum_{i=1}^{n_2} \log[f_{T,C}(t_{i2}, 2)] + \sum_{i=3}^{n_3} \log[\bar{F}_T(t_{i3})] \\
 &= n_1 \log(\pi_1 \lambda_1) - \lambda_1 \sum_{i=1}^{n_1} t_{i1} + n_2 \log[(1 - \pi_1) \lambda_2] - \lambda_2 \sum_{i=1}^{n_2} t_{i2} \\
 &\quad + n_3 \sum_{i=3} \log[\pi_1 \exp(-\lambda_1 t_{i3}) + (1 - \pi_1) \exp(-\lambda_2 t_{i3})] \\
 &= n_1 \log(\pi_1 \lambda_1) + n_2 \log[(1 - \pi_1) \lambda_2] - \left(\lambda_1 \sum_{i=1}^{n_1} t_{i1} + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n_2} t_{i2} \right) \\
 &\quad + n_3 \sum_{i=3} \log[\pi_1 \exp(-\lambda_1 t_{i3}) + (1 - \pi_1) \exp(-\lambda_2 t_{i3})],
 \end{aligned}$$

donde n_1, n_2 y n_3 son el número de componentes que fallaron por la causa 9, por las demás causas y los censurados, respectivamente.

Las estimaciones puntuales máximo verosímiles y la inversa de la matriz de información observada de Fisher, que es una estimación de la matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\theta}$, son

$$\hat{\theta} = (0.5495186, 0.2204174, 0.7233730),$$

$$\mathbf{I}^{-1}(\theta)|_{\theta=\hat{\theta}} = 10^{-2} \begin{pmatrix} 0.703058500 & -0.005308727 & 0.06069193 \\ -0.005308727 & 0.288260400 & -0.02532054 \\ 0.060691930 & -0.025320549 & 3.56076741 \end{pmatrix}.$$

Una pregunta importante que surge de este análisis es ¿las tasas de falla son iguales para los dos modos de falla? La pregunta anterior se puede expresar por medio de las siguientes hipótesis

$$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 \quad vs \quad H_a : \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

las cuales se prueban por medio del estadístico de razón de verosimilitudes. Los resultados se presentan en la Tabla 3.2 y se concluye rechazar H_0 a favor de H_a , lo que implica que hay evidencia de los datos a favor de que las tasas de fallas no son iguales.

Bajo H_0 : máx $l \approx -92.19447$
Bajo H_a : máx $l \approx -88.03793$
Estadístico: $D_0 = 2(92.19447 - 88.03793) \approx 8.313085$
p -valor: $P[D > D_0] \approx 0.003936049$, $D \sim \chi_{(1)}^2$ aproximadamente.

Tabla 3.2: Resultados para la prueba de hipótesis $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 \quad vs \quad H_a : \lambda_1 \neq \lambda_2$ para el modelo de mezcla exponencial utilizando la prueba de razón de verosimilitudes.

Modelo de mezcla Weibull

El modelo de mezcla exponencial puede ser extendido a un modelo de mezcla Weibull con funciones de sub confiabilidad

$$\bar{F}_{T,C}(t, i) = \pi_i \exp[-(\lambda_i t)^{\gamma_i}], \quad \pi_i \in [0, 1], \quad \lambda_i > 0, \quad \gamma_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad t > 0,$$

de las que se obtienen las siguientes sub densidades y confiabilidad marginal de T :

$$\begin{aligned} f_{T,C}(t, i) &= -\frac{d}{dt} \bar{F}_{T,C}(t, i), \quad i = 1, 2 \\ &= \pi_i \gamma_i \lambda_i^{\gamma_i} t^{\gamma_i - 1} \exp[-(\lambda_i t)^{\gamma_i}], \quad i = 1, 2, \\ \bar{F}_T(t) &= \sum_{i=1}^2 \bar{F}_{T,C}(t, i) \\ &= \pi_1 \exp[-(\lambda_1 t)^{\gamma_1}] + (1 - \pi_1) \exp[-(\lambda_2 t)^{\gamma_2}]. \end{aligned}$$

Considerando $\theta \equiv (\pi_1, \lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2)$, las estimaciones puntuales máximo verosímiles y la inversa de la matriz de información observada de Fisher son

$$\hat{\theta} = (0.4993802, 0.2611175, 0.4944993, 2.0733029, 0.6241909),$$

$$\mathbf{I}^{-1}(\theta)|_{\theta=\hat{\theta}} = 10^{-2} \begin{pmatrix} 0.73606458 & -0.01761245 & 0.11575765 & -0.06134572 & 0.01953382 \\ -0.01761245 & 0.11272733 & -0.05486254 & -0.30033202 & -0.01294924 \\ 0.11575765 & -0.05486254 & 4.39045380 & -0.22918548 & -0.39205951 \\ -0.06134572 & -0.30033202 & -0.22918548 & 13.05382828 & -0.07555490 \\ 0.01953382 & -0.01294924 & -0.39205951 & -0.07555490 & 1.64395955 \end{pmatrix}.$$

Con base en lo anterior, se puede hacer una prueba de razón de verosimilitudes para decidir cuál modelo ajusta mejor a los datos: un modelo de mezcla exponencial (H_0) o un modelo de mezcla Weibull (H_a). Los resultados se muestran en la Tabla 3.3 y se concluye que el modelo de mezcla Weibull ajusta mejor a los datos que el modelo de mezcla exponencial.

Bajo H_0 : máx $l \approx -88.03793$
Bajo H_a : máx $l \approx -83.27925$
Estadístico: $D_0 = 2(88.03793 - 83.27925) \approx 9.51737$
p -valor: $P[D > D_0] \approx 0.00857688$, $D \sim \chi^2_{(2)}$ aproximadamente.

Tabla 3.3: Resultados para la comparación de los modelos de mezcla exponencial y mezcla Weibull utilizando el estadístico de razón de verosimilitudes.

Por otro lado, empleando el enfoque de tiempos latentes de falla, se propone una confiabilidad Weibull bivariada como modelo de confiabilidad conjunta para (T_1, T_2) , el cual es

$$\bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2) \equiv P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = \exp \left\{ - \left[\left(\frac{t_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\alpha}} + \left(\frac{t_2}{\lambda_2} \right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} \right]^\alpha \right\},$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0, \alpha \in (0, 1], t_1, t_2 > 0.$$

Las sub densidades están dadas por

$$f_{T,C}(t, i) = - \frac{\partial}{\partial t_i} \bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=t_2=t}, \quad i = 1, 2,$$

de donde

$$f_{T,C}(t, 1) = \exp \left\{ - \left[\left(\frac{t}{\lambda_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\alpha}} + \left(\frac{t}{\lambda_2} \right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} \right]^\alpha \right\} \left[\left(\frac{t}{\lambda_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\alpha}} + \left(\frac{t}{\lambda_2} \right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} \right]^{\alpha-1} \left(\frac{t}{\lambda_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\alpha}-1} \frac{\gamma_1}{\lambda_1},$$

$$f_{T,C}(t, 2) = \exp \left\{ - \left[\left(\frac{t}{\lambda_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\alpha}} + \left(\frac{t}{\lambda_2} \right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} \right]^\alpha \right\} \left[\left(\frac{t}{\lambda_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\alpha}} + \left(\frac{t}{\lambda_2} \right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} \right]^{\alpha-1} \left(\frac{t}{\lambda_2} \right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}-1} \frac{\gamma_2}{\lambda_2}.$$

De las expresiones anteriores para las sub densidades y haciendo $\theta \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2, \alpha)$, la log verosimilitud es

$$l(\theta; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n_1} \log[f_{T,C}(t_{i1}, 1)] + \sum_{i=1}^{n_2} \log[f_{T,C}(t_{i2}, 2)] + \sum_{i=1}^{n_3} \log[\bar{F}_{T_1, T_2}(t_{i3}, t_{i3})].$$

Para maximizar la log verosimilitud de los 5 parámetros, los valores iniciales propuestos para los cuatro primeros parámetros se obtuvieron de las estimaciones marginales por medio de papeles de probabilidad; como valor inicial del parámetro de dependencia se propone el valor de 0.5, resultando

$$\hat{\theta} = (3.2890626, 4.0833379, 1.1349920, 0.7618795, 0.1532146).$$

En la Figura 3.2 se muestra que, apesar de la estimación puntual del parámetro de dependencia α , se cuenta con escasa información de éste, pues un corte en 0.146 a la verosimilitud perfil relativa ([30]) produce un intervalo aproximado de verosimilitud confianza de 95 % que contiene el rango completo de variación de α .

Al hacer la siguiente reparametrización $\tilde{\alpha} = \log \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} \right]$ se tiene que $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$. En la Figura 3.3 se observa un comportamiento similar que en la Figura 3.2. A pesar de que se tiene una

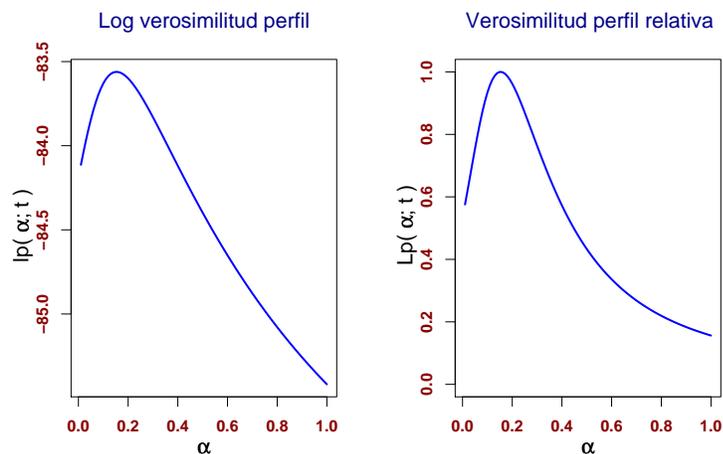


Figura 3.2: Log verosimilitud y verosimilitud perfil relativa del parámetro de dependencia α .

estimación puntual de $\hat{\alpha} \approx -1.7096107$ (que corresponde a $\hat{\alpha} \approx 0.1532142$), se observa una cola derecha bastante pesada en la verosimilitud perfil relativa. Conforme $\tilde{\alpha}$ crece, pareciera que la perfil relativa tiende a un valor asintótico alrededor de 0.15. En este caso tampoco es posible dar un intervalo informativo para $\tilde{\alpha}$.

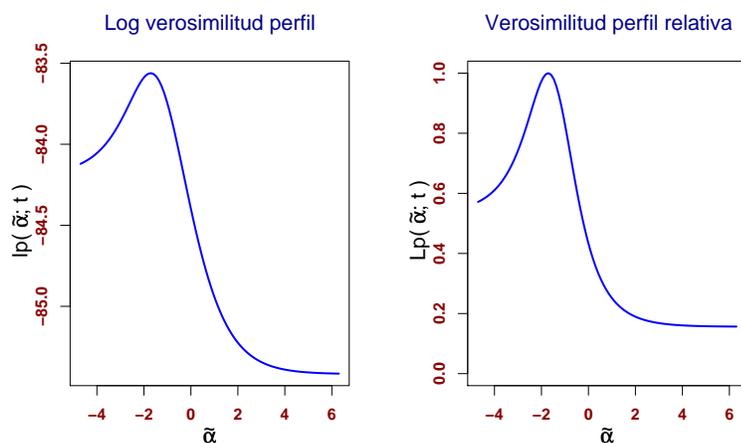


Figura 3.3: Log verosimilitud y verosimilitud perfil relativa del parámetro $\tilde{\alpha}$.

Modelo utilizando cópulas

Otra manera de proponer un modelo bivariado para (T_1, T_2) es utilizando cópulas. Se utilizará la cópula arquimediana Gumbel con marginales Weibull. La cópula Gumbel es

$$C_\alpha(u, v) = \exp \left\{ - \left[(-\log(u))^\alpha + (-\log(v))^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \quad u, v \in [0, 1], \quad \alpha \geq 1,$$

con generador $\phi(t) = [-\log(t)]^\alpha$. Con base en (3.11), se tiene que $\tau = 1 - \frac{1}{\alpha}$, que es la relación entre el parámetro de dependencia α y la τ de Kendall.

Así, la distribución bivariada es

$$F_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = C_\alpha[F_{T_1}(t_1), F_{T_2}(t_2)], \quad t_1, t_2 \geq 0,$$

de donde la confiabilidad conjunta está dada por

$$\begin{aligned} \bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2) &= P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) \\ &= 1 - P(\{T_1 \leq t_1\} \cup \{T_2 \leq t_2\}) \\ &= 1 - F_{T_1}(t_1) - F_{T_2}(t_2) + F_{T_1, T_2}(t_1, t_2) \\ &= 1 - F_{T_1}(t_1) - F_{T_2}(t_2) + C_\alpha[F_{T_1}(t_1), F_{T_2}(t_2)]. \end{aligned}$$

Las sub densidades son

$$f_{T, C}(t, i) = - \left. \frac{\partial}{\partial t_i} \bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2) \right|_{t_1=t_2=t}, \quad i = 1, 2,$$

esto es

$$\begin{aligned} f_{T, C}(t, 1) &= f_{T_1}(t) \left\{ 1 - \frac{1}{F_{T_1}(t)} [-\log(F_{T_1}(t))]^{\alpha-1} C[F_{T_1}(t), F_{T_2}(t)] \right\}, \\ f_{T, C}(t, 2) &= f_{T_2}(t) \left\{ 1 - \frac{1}{F_{T_2}(t)} [-\log(F_{T_2}(t))]^{\alpha-1} C[F_{T_1}(t), F_{T_2}(t)] \right\}. \end{aligned}$$

Con base en la relación $\tau = 1 - \frac{1}{\alpha}$, en el método de optimización se propone a 50 como cota superior de búsqueda para α , que corresponde a un valor de $\tau = 0.98$. La estimación puntual máximo verosímil de $\theta = (\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ es

$$\hat{\theta} = (2.334394, 2.535393, 1.085865, 1.133581, 50).$$

Con base en la figura 3.4, se intuye que la estimación puntual de α es debido a la restricción de búsqueda, pues se observa que la log verosimilitud es creciente.

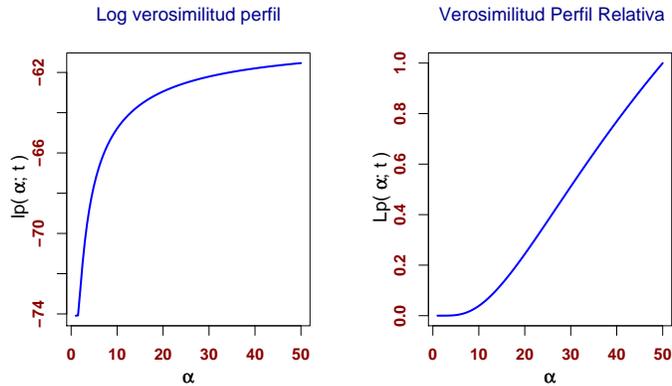


Figura 3.4: Log verosimilitud y verosimilitud perfil relativa del parámetro $\tilde{\alpha}$ para el modelo con la cópula Gumbel.

Capítulo 4

Riesgos en Competencia en Sistemas Reparables

La confiabilidad juega un papel vital en el desarrollo de productos de calidad. Para muchos productos, los clientes ven a la confiabilidad como una de las características más importantes de calidad. En las últimas décadas se ha hecho investigación en confiabilidad, sin embargo, mucha de esta literatura está enfocada a sistemas no reparables, esto es, sistemas que al momento de fallar son reemplazados. En el presente capítulo se realiza un breve estudio sobre la confiabilidad de sistemas reparables, es decir, sistemas en los que al momento de fallar o dejar de realizar sus funciones adecuadamente, puede restaurarse a condiciones de operación por cualquier método excepto el reemplazo completo del sistema. En la sección 4.1 se presenta la terminología para estos sistemas. Generalmente, los sistemas reparables suelen modelarse probabilísticamente mediante ciertos procesos estocásticos denominados procesos puntuales, que describen la ocurrencia de ciertos eventos de interés a través del tiempo. En la sección 4.2 se presentan algunas definiciones y conceptos básicos para trabajar con estos modelos. En muchos casos, cuando se analizan conjuntos de datos, es común hacer hipótesis de independencia e igualdad (aunque posiblemente desconocida) de su ley de probabilidad. Cuando este es el caso, surge una clase especial de procesos puntuales, que son los procesos de renovación. Dentro de los procesos de renovación, uno que es especialmente útil para modelar tiempos entre falla de cierto tipo de sistemas reparables, es el proceso de Poisson homogéneo en el que se asume una distribución exponencial para los tiempos entre falla. En las secciones 4.3 y 4.4 se definirán en forma precisa los procesos de renovación y los procesos de Poisson, así como el proceso de Poisson no homogéneo, mencionándose resultados importantes en el estudio de estos [29]. En la sección 4.5 se describen algunos métodos con los cuales se pueden elegir los modelos estocásticos que mejor describan a los datos para, posteriormente, hacer la inferencia sobre los parámetros. Por otro lado, una liga entre el estudio de los sistemas reparables y de riesgos en competencia es la acción de mantenimiento, en particular, el mantenimiento preventivo. En la sección 4.6 se presentan los diferentes tipos de mantenimiento haciendo énfasis en el mantenimiento preventivo basado en condición y, por último, en la sección 4.7 se describen algunos modelos para datos de riesgos en competencia.

4.1. Terminología y notación para sistemas reparables

Para fines de este trabajo, un sistema lo definiremos como la colección de dos o más partes, las cuales están diseñadas para que, en conjunto, desarrollen una o más funciones establecidas. La definición anterior es general y es aplicable en bastantes áreas, por ejemplo, se puede estar interesado en el estudio del sistema respiratorio de una persona en particular. En confiabilidad se presentan tipos especiales de sistemas, como lo son los sistemas reparables. Un *sistema reparable* es aquel sistema que, una vez que ha fallado en la realización de alguna

de sus funciones, puede restaurarse a condiciones de operación por cualquier método excepto el reemplazo completo del sistema. Ya que los sistemas generalmente están compuestos por varias partes o componentes, estos sistemas pueden fallar debido a más de una causa, de modo que el comportamiento o patrón que siguen los tiempos entre falla es de vital importancia. Por ejemplo, si los tiempos entre falla tienden a ser más grandes, esto es una indicación de un incremento o mejora de la confiabilidad, pues el sistema “se tarda más en fallar”, de lo contrario, si estos tiempos son cada vez más pequeños, la confiabilidad del sistema es cada vez menor o está en decremento ya que el sistema “falla cada vez más rápido”.

Como ejemplo de un sistema reparable se puede considerar a un automóvil, ya que muchas de las fallas se pueden reparar sin necesidad de cambiar el auto por completo. Por ejemplo, si se tiene el problema de encendido debido a la mala conexión de la batería con los cables que alimentan el sistema eléctrico, el problema se puede solucionar con una adecuada limpieza y conexión de los cables y no es necesario cambiar el auto. Un *sistema no reparable* es aquel que es descartado o restituido después de una falla. Como un ejemplo sencillo podemos pensar en un foco, el cual una vez que ha fallado, es decir, se ha fundido, la única forma de repararlo es cambiarlo por completo.



Figura 4.1: Ejemplo de un sistema reparable y un sistema no reparable.

Ya que este tipo de sistemas es muy variado, para su tratamiento se debe tener claro la escala de tiempo que se va a utilizar en las mediciones de los tiempos de falla. Por ejemplo, para un refrigerador, el cual está trabajando continuamente, podría ser apropiado medir el tiempo como el tiempo transcurrido desde que se puso en operación. El número de kilómetros manejados puede ser una medida razonable de la “edad” de un automóvil, más que el tiempo desde que fue puesto en servicio.

Para un sistema reparable, denotaremos a $0 < T_1 < T_2 < \dots$ como los tiempos de falla medidos en *tiempo global*, esto es, medidos desde que el sistema se puso en operación. Los tiempos entre fallas se denotarán como X_1, X_2, \dots . Con base en lo anterior, se tiene la siguiente

relación entre los tiempos de falla y los tiempos entre falla

$$\begin{aligned} X_1 &= T_1 \\ X_2 &= T_2 - T_1 \\ X_3 &= T_3 - T_2 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.1}$$

Equivalentemente, (4.1) se puede escribir como

$$\begin{aligned} T_1 &= X_1 \\ T_2 &= X_1 + X_2 \\ T_3 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.2}$$

Para precisar los conceptos de registros hechos en tiempo global y en tiempo local, se presentan las siguientes definiciones.

Definición 4.1.1 (Tiempo global) *Se dice que las fallas de un sistema reparable son medidas en tiempo global si y sólo si las fallas son registradas desde que el sistema se comenzó a operar. Las fallas en tiempo global se denotarán por $T_1 < T_2 < \dots$.*

Definición 4.1.2 (Tiempo local) *Los tiempos de falla de un sistema reparable son medidos en tiempo local si y sólo si los tiempos de falla son registrados como tiempos desde la última falla. Las fallas en tiempos local serán denotadas por X_1, X_2, \dots .*

Como se mencionó, el comportamiento de los tiempos entre falla es importante en el estudio de sistemas reparables, ya que dan información acerca del deterioro o mejora que presenta. Estos conceptos se definen a continuación.

Definición 4.1.3 (Deterioro y mejora) *Diremos que un sistema reparable está en deterioro si los tiempos entre fallas tienden a ser cada vez más pequeños. Por el contrario, si los tiempos entre fallas tienden a ser cada vez más grandes, diremos que el sistema está en mejora.*

Para un sistema no reparable, el tiempo de vida, como se ha mencionado, puede conceptualizarse como una variable aleatoria no negativa. Ya que la falla de un sistema no necesariamente afecta el funcionamiento de otro sistema similar que se puede localizar en cualquier otro lado, es razonable suponer que los sistemas tienen tiempos de falla independientes. Más aun, si los sistemas fueron fabricados mediante el mismo proceso de manufactura y bajo las mismas condiciones, es sensato suponer que los tiempos de falla son idénticamente distribuidos. Así, con base en lo anterior, se suponen que los tiempos de falla son independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.).

4.2. Teoría básica de procesos puntuales

Una forma de modelar los tiempos de falla de sistemas reparables es por medio de un tipo de procesos estocásticos llamados procesos puntuales. Definiremos un *proceso puntual* como un proceso estocástico que describe la ocurrencia de eventos en el tiempo. Estas ocurrencias son pensadas como puntos en el eje del tiempo. En general, los tiempos entre ocurrencias no son independientes ni idénticamente distribuidos. Para nuestro propósito, estas “ocurrencias en el tiempo” serán los tiempos de falla de un sistema reparable.

Para el estudio de los procesos puntuales, se necesita una variable que “cuente” los eventos en el tiempo. Esta variable se define a continuación.

Definición 4.2.1 (Variable aleatoria de conteo) Sea $N(t)$ la variable aleatoria que denota el número de eventos (en nuestro caso fallas) en el intervalo $(0, t]$. Cuando el argumento es un intervalo de la forma $N(a, b]$, la variable en cuestión denota el número de fallas en ese intervalo. N es llamada variable aleatoria de conteo.

Ya que en general un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias en el tiempo, es de interés tener conocimiento de la distribución conjunta de estas variables en cierto intervalo de tiempo. En nuestro caso, un modelo estocástico para un proceso de conteo queda especificado si para toda n y t_1, t_2, \dots, t_n , se conoce la distribución conjunta de $N(t_1), N(t_2), \dots, N(t_n)$.

Los siguientes resultados son útiles en la caracterización de los procesos puntuales.

Teorema 4.2.1 Para cualquier proceso puntual, se tienen las siguientes equivalencias

1. $T_i > v \Leftrightarrow N(v) < i$.
2. $T_i \leq w \Leftrightarrow N(w) \geq i$.
3. $v < T_i \leq w \Leftrightarrow N(v) < i \leq N(w)$.

Teorema 4.2.2 La función de densidad conjunta de los siguientes conjuntos de variables aleatorias determina la función de densidad conjunta de las otras.

1. $N(u_1), N(u_2), \dots, N(u_n)$ para cualesquiera n y u_1, u_2, \dots, u_n .
2. T_1, T_2, \dots, T_n para cualquier n .
3. X_1, X_2, \dots, X_n para cualquier n .

En muchas aplicaciones es muy importante saber el número promedio de eventos que se presentan hasta algún tiempo t y también alguna medida que indique la frecuencia de eventos por unidad de tiempo, lo que motiva las siguientes definiciones.

Definición 4.2.2 (Función media de un proceso puntual) La función media de un proceso puntual está definida por

$$\Lambda(t) = E[N(t)], \quad t > 0.$$

Definición 4.2.3 (Tasa de ocurrencia de fallas (ROCOF)) Cuando Λ es diferenciable, definimos la tasa de ocurrencia de fallas como

$$\mu(t) = \frac{d\Lambda(t)}{dt}, \quad t > 0.$$

La función ROCOF (por sus siglas en inglés) puede ser interpretada como la tasa instantánea de cambio en el número esperado de fallas.

En algunos casos, la probabilidad de que se presenten cierto número de eventos en un intervalo de tiempo, depende solamente de la longitud del intervalo y no de la posición que tenga este en el tiempo. Por otro lado, algunos procesos tienen la característica de que el números de eventos en intervalos ajenos son independientes. De las propiedades anteriores se derivan las siguientes definiciones.

Definición 4.2.4 (Incrementos estacionarios) Un proceso puntual tiene la propiedad de incrementos estacionarios si para toda k

$$P(N(t, t + s] = k)$$

es independiente de t , es decir,

$$P(N(t, t + s] = k) = P(N(0, s] = k), \text{ para toda } k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Definición 4.2.5 (Incrementos independientes) *Un proceso puntual tiene la propiedad de incrementos independientes si para toda n y para todas $s_1 < r_1 \leq r_2 < s_2 \leq \dots < r_n \leq s_n$, las variables aleatorias $N(r_1, s_1], N(r_2, s_2], \dots, N(r_n, s_n]$ son independientes, es decir,*

$$P(N(r_1, s_1] = k_1, \dots, N(r_n, s_n] = k_n) = \prod_{i=1}^n P(N(r_i, s_i] = k_i).$$

Otra función importante en el estudio de los procesos puntuales es la función de intensidad.

Definición 4.2.6 (Función de intensidad) *La función de intensidad de un proceso puntual se define como*

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t, t + \Delta t] \geq 1]}{\Delta t}.$$

Intuitivamente, la función de intensidad es la probabilidad de que ocurra al menos una falla (evento de interés) en un intervalo pequeño dividida por la longitud de este. Se presentarán más fallas donde $\lambda(t)$ toma valores grandes y pocas donde tome valores pequeños. Es importante diferenciar la función de intensidad con la función de riesgo definida en (2.2). La función de riesgo es el límite de una probabilidad *condicional*, no así la función de intensidad.

La función de intensidad y la función ROCOF presentan una relación interesante como se muestra en el siguiente resultado,

Teorema 4.2.3 *Si la probabilidad de fallas simultáneas es cero, entonces $\lambda(t) = \mu(t)$.*

Una función de intensidad un poco más general que la definida anteriormente se presenta condicionando en la historia del proceso.

Definición 4.2.7 (Función de intensidad completa) *La función de intensidad completa está definida como*

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t, t + \Delta t] \geq 1 \mid \mathcal{H}_t)}{\Delta t},$$

donde \mathcal{H}_t es la historia del proceso.

La Figura 4.2 ilustra una función de intensidad completa para un proceso puntual. La función de intensidad completa mostrada en la Figura 4.2 está condicionada en fallas que ocurrieron en los tiempos $t = 2, 5, 9, 11, 13, 15$. Note que después de cada falla, la función tiene el mismo comportamiento que cuando inicia en $t = 0$; esto es cierto tanto para la primera falla como para la sexta. Por lo tanto un proceso de renovación no podría ser usado para modelar un sistema que está en deterioro, debido a que en cada falla el sistema regresa a condiciones de operación similares a las que tenía cuando nuevo.

Ya que los sistemas que se están estudiando son sometidos a reparaciones al momento de fallar, estas reparaciones juegan un papel fundamental en el desempeño posterior del sistema. Dependiendo de las condiciones que presenta el sistema después de haber sido reparado, se distinguen al menos dos tipos de reparación: mínima y perfecta, las cuales se definen en seguida.

Definición 4.2.8 (Reparación mínima) *Una reparación mínima es aquella que se presenta cuando la reparación hecha a un sistema deja a éste en las mismas condiciones de operación que tenía justo antes de la falla.*

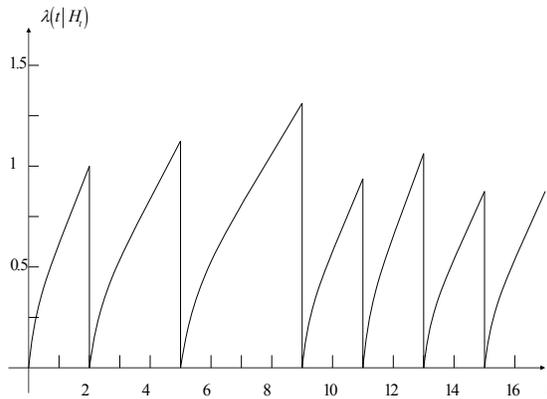


Figura 4.2: Función de intensidad completa, condicionada en los tiempos de falla $t = 2, 5, 9, 11, 13, 15$.

Definición 4.2.9 (Reparación perfecta) Una reparación perfecta es aquella que se presenta cuando la reparación hecha a un sistema deja a éste en condiciones de operación como si fuera nuevo.

Como se verá más adelante, el tipo de reparaciones hechas al sistema influirán sobre la elección del proceso puntual.

4.3. Procesos de renovación

Cuando se realiza una reparación perfecta después de cada falla, los tiempos entre falla X_1, X_2, \dots debieran ser idénticamente distribuidos. Si agregamos la hipótesis de independencia entonces el proceso de fallas se conoce como *proceso de renovación*.

Recordando que la variable aleatoria discreta $N(t)$ es el número de fallas en el intervalo $[0, t]$, se tiene

$$P[N(t) \geq k] = P(T_k \leq t) = P\left(\sum_{i=1}^k X_i \leq t\right).$$

Para encontrar la distribución de $N(t)$ se necesitará conocer la distribución de una suma de variables aleatorias independientes. Para esto, el siguiente concepto es útil.

Definición 4.3.1 (Convolución) Sean f y g densidades tales que $x \leq 0 \implies f(x) = g(x) = 0$. La convolución de f y g está definida por

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)dy. \quad (4.4)$$

Así, de la definición anterior se tiene el siguiente lema que muestra la forma de calcular la distribución de una suma de dos variables aleatorias independientes.

Lema 4.3.1 Si X y Y son variables aleatorias independientes no negativas con densidades f_X y g_Y , respectivamente, entonces la densidad de la suma $Z = X + Y$ está dada por

$$f_Z(z) = (f_X * g_Y)(z).$$

Observe que $N(t)$ satisface

$$P[N(t) \geq k] = P\left(\sum_{i=1}^k X_i \leq t\right) = F^{(k)}(t),$$

donde $F_X^{(k)}(t)$ es la función de distribución de la k -ésima convolución de la densidad f_X . Con base en lo anterior, la función media y la función ROCOF para un proceso de renovación son, respectivamente,

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= E[N(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(N(t) = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [P(N(t) \geq k) - P(N(t) \geq k+1)] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N(t) \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{(k)}(t), \quad t > 0, \\ \mu(t) &= \frac{d}{dt}\Lambda(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_X^{(k)}(t), \quad t > 0,\end{aligned}$$

donde $f_X^{(k)}$ es la función de densidad de la k -ésima convolución de f_X .

4.3.1. El proceso de Poisson

En la sección anterior se habló sobre los procesos puntuales. En la presente haremos referencia a un tipo especial de éstos procesos puntuales y procesos de renovación, el cual es el proceso de Poisson homogéneo, que es un proceso estocásticos muy útil para modelar tiempos entre falla de sistemas reparables. En la sección posterior se hablará de un proceso más general que el de Poisson homogéneo, el de Poisson no homogéneo, el cual no pertenece a la clase de procesos de renovación.

La distribución de probabilidad Poisson es utilizada como modelo en un gran número de aplicaciones. Tiene un papel central en el estudio de los procesos de Poisson, de manera que se dará la definición de ésta.

Definición 4.3.2 *Una variable aleatoria X sigue una distribución Poisson de parámetro $\phi > 0$ ($X \sim \text{POISSON}(\phi)$) si y sólo si es una variable aleatoria discreta y su función de masa de probabilidades está dada por*

$$p(x) \equiv P(X = x) = \frac{\phi^x \exp(-\phi)}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Algo que caracteriza a la distribución Poisson es la igualdad que preserva su media y varianza, como lo muestra el siguiente resultado

Teorema 4.3.1 *Si $X \sim \text{POISSON}(\phi)$, entonces $E(X) = \phi$ y $V(X) = \phi$.*

Como en el capítulo anterior, denotaremos a $N(t)$ como el número de fallas (eventos de interés) hasta el tiempo t , y $N(a, b]$ el número de fallas en el intervalo de tiempo $(a, b]$. Con base en lo anterior, se presenta la definición para un proceso de Poisson.

Definición 4.3.3 (Proceso de Poisson) *Un proceso de conteo es llamado un proceso de Poisson si y sólo si cumple con las siguientes propiedades:*

1. $N(0) = 0$,
2. *Tiene incrementos independientes.*
3. *Existe una función λ tal que*

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t, t + \Delta t) = 1]}{\Delta t}.$$

La función λ es llamada la función de intensidad del proceso de Poisson,

4.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t, t + \Delta t) \geq 2]}{\Delta t} = 0.$$

La propiedad 4 de la definición anterior excluye la posibilidad de fallas simultáneas. Con base en las propiedades de un Proceso de Poisson se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.3.2 *Las propiedades (1) – (4) de la definición anterior implican que*

$$P[N(t) = n] = \frac{1}{n!} \left(\int_0^t \lambda(x) dx \right)^n \exp \left(- \int_0^t \lambda(x) dx \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Corolario 4.3.1 *Para un proceso de Poisson, la variable aleatoria $N(a, b]$ tiene una distribución Poisson con media*

$$\int_a^b \lambda(x) dx.$$

El corolario anterior es una motivación del nombre a este proceso, ya que la variable aleatoria de conteo $N(t)$ sigue una ley de probabilidad Poisson cuyo parámetro depende de la longitud del intervalo. El siguiente teorema da una caracterización de un proceso de Poisson.

Teorema 4.3.3 *Un proceso de conteo $N(t)$ es un proceso de Poisson si y sólo si*

1. $N(0) = 0$,
2. *El proceso tiene la propiedad de incrementos independientes, y*
3. *Para cualquier $0 < a < b$, $N(a, b] \sim \text{POISSON} \left(\int_a^b \lambda(x) dx \right)$.*

Proceso de Poisson homogéneo

Definición 4.3.4 *El proceso de Poisson homogéneo (PPH) es un proceso de Poisson con función de intensidad constante.*

El PPH es el modelo más simple utilizado para los sistemas reparables, pero se debe emplear con precaución, ya que no puede ser utilizado para modelar sistemas que se encuentran en deterioro o en mejora, pues la función de intensidad debe ser constante. Tiene una relación muy importante con la distribución exponencial como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.3.4 *Un proceso de conteo es un PPH con intensidad $\lambda(t) = \lambda > 0$, $t > 0$, si y sólo si los tiempos entre fallas son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas exponenciales con media $1/\lambda$.*

El resultado anterior exhibe al proceso de Poisson homogéneo como un proceso de renovación, pues los tiempos entre falla son i.i.d. Como se verá más adelante, los siguientes teoremas son de utilidad para hacer inferencia sobre la tasa de fallas λ utilizando el método de máxima verosimilitud.

Corolario 4.3.2 *Si $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n$ son los tiempos de falla de un PPH con intensidad $\lambda > 0$, entonces la densidad conjunta de T_1, T_2, \dots, T_n está dada por*

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \lambda^n \exp(-\lambda t_n), \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n.$$

Teorema 4.3.5 *Sean $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n$ los tiempos de falla de un PPH, entonces, condicionado a $T_n = t_n$, las variables aleatorias $T_1 < T_2 < \dots < T_{n-1}$ se distribuyen como los $n - 1$ estadísticos de orden de una distribución uniforme en el intervalo $(0, t_n)$.*

Teorema 4.3.6 *Para un PPH, condicionado a $N(t) = n$, los tiempos de falla $T_1 < T_2 < \dots < T_{n-1} < T_n$ se distribuyen como estadísticos de orden de una distribución uniforme en $(0, t)$.*

- Longitudes entre tiempos de falla.

Supongamos que fijamos un tiempo $t > 0$, y es de interés estudiar el tiempo de la siguiente falla o la falla más reciente. Estas ideas se pueden formalizar en las siguientes definiciones.

Definición 4.3.5 (Vida residual) *El tiempo de vida residual es $F_t = T_{N(t)+1} - t$, esto es, el tiempo de espera hasta la próxima falla si se empieza a observar desde el tiempo t .*

Definición 4.3.6 (Edad o vida actual) *La edad o vida actual es $B_t = t - T_{N(t)}$, esto es, el tiempo desde la falla más reciente.*

Definición 4.3.7 (Vida total) *La vida total es $L_t = F_t + B_t$.*

En la Figura 4.3 se ilustran las cantidades anteriores.

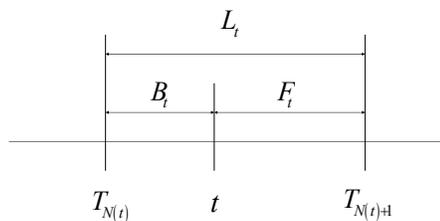


Figura 4.3: Posibles variables de interés para un proceso de renovación.

4.4. El proceso de Poisson no homogéneo

Dentro de los procesos de Poisson se encuentran dos clases, las cuales se identifican por el tipo de su función de intensidad. Uno es el proceso de Poisson homogéneo y otro el proceso de Poisson no homogéneo, el cual se define en seguida.

Definición 4.4.1 (Proceso de Poisson no homogéneo) *El proceso de Poisson no homogéneo (PPNH) es un proceso de Poisson cuya función de intensidad no es constante.*

Ya que el PPNH es más general que el PPH, se presentará la forma en que se construye la función de verosimilitud considerando una intensidad no necesariamente constante, $\lambda(t)$, y con base en datos que presentan distintos tipos de censura.

▪ Función de verosimilitud

Dado un conjunto de tiempos de falla, se construirá la función de verosimilitud para tres distintos tipos de censura en los datos [11].

• Censura tipo I

Definición 4.4.2 (Censura tipo I) *Cuando la prueba se detiene después de un tiempo pre-determinado, se dice que los tiempos registrados presentan censura tipo I.*

Para los datos que son censurados de esta manera, la función de verosimilitud se puede obtener como sigue. Suponga que se ha observado un sistema reparable en el intervalo de tiempo $(0, t_0)$ y que se registraron fallas en los tiempos t_1, t_2, \dots, t_n , los cuales se pretenden modelar con un PPNH con función de intensidad $\lambda(t)$. Con base en lo anterior y recordando que $N(a, b) \sim \text{POISSON} \left(\int_a^b \lambda(t) dt \right)$, en la Tabla 4.1 se presentan las probabilidades de falla y no falla en el intervalo (a, b) .

Evento	Probabilidad
0 fallas en (a, b)	$\exp \left[- \int_a^b \lambda(t) dt \right]$
1 falla en (a, b)	$\exp \left[- \int_a^b \lambda(t) dt \right] \int_a^b \lambda(t) dt.$

Tabla 4.1: Probabilidad de falla y no falla en el intervalo (a, b) para un PPNH con función de intensidad $\lambda(t)$.

Así, de lo anterior y considerando la propiedad de incrementos independientes, la probabilidad de no observar fallas en $(0, t_1)$, una falla en $(t_1, t_1 + \Delta t_1)$, cero fallas en $(t_1 + \Delta t_1, t_2)$, una falla en $(t_2, t_2 + \Delta t_2)$ y así sucesivamente hasta la probabilidad de no observar fallas en $(t_n + \Delta t_n, t_0)$, está dada por

$$\begin{aligned}
 & \exp \left[- \int_0^{t_1} \lambda(t) dt \right] \cdot \exp \left[- \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \lambda(t) dt \right] \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \lambda(t) dt \cdot \exp \left[- \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \right] \cdots \exp \left[- \int_{t_n + \Delta t_n}^{t_0} \lambda(t) dt \right] \\
 &= \exp \left[- \int_0^{t_1} \lambda(t) dt - \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \lambda(t) dt - \cdots - \int_{t_n + \Delta t_n}^{t_0} \lambda(t) dt \right] \\
 & \quad \times \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \lambda(t) dt \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \cdots \int_{t_n + \Delta t_n}^{t_0} \lambda(t) dt \\
 &= \exp \left[- \int_0^{t_0} \lambda(t) dt \right] \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \lambda(t) dt \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \cdots \int_{t_n + \Delta t_n}^{t_0} \lambda(t) dt.
 \end{aligned}$$

Dividiendo por $\Delta t_1 \Delta t_2 \dots \Delta t_n$ y haciendo $\Delta t_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, resulta que la función de verosimilitud es:

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \dots \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_2 \dots \Delta t_n} \exp \left[- \int_0^{t_0} \lambda(t) dt \right] \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \lambda(t) dt \dots \int_{t_n + \Delta t_n}^{t_0} \lambda(t) dt \\
 &= \exp \left[- \int_0^{t_0} \lambda(t) dt \right] \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t_1} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \lambda(t) dt \dots \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_n + \Delta t_n} \lambda(t) dt \\
 &= \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_0} \lambda(t) dt \right]. \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

- Censura tipo II

Definición 4.4.3 (Censura tipo II) Cuando la prueba se detiene después de un predeterminado número de fallas, se dice que los tiempos registrados presentan censura tipo II.

Para los tiempos con censura tipo II, la función de verosimilitud es la densidad conjunta de los tiempos de falla T_1, T_2, \dots, T_n . Esta afirmación es consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 4.4.1 La densidad conjunta de los tiempos de falla T_1, T_2, \dots, T_n para un PPNH con función de intensidad $\lambda(t)$ está dada por

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_n} \lambda(x) dx \right]. \tag{4.6}$$

Lo siguientes resultados serán de especial utilidad para la construcción de estadísticos de prueba en el contraste de ciertas hipótesis que se presentarán en la sección 4.5.

Lema 4.4.1 El tiempo de la n -ésima ocurrencia de un PPNH con función de intensidad $\lambda(t)$ tiene función de densidad

$$f_{T_n}(t) = \frac{\lambda(t)[\Lambda(t)]^{n-1}}{\Gamma(n)} \exp[-\Lambda(t)], \quad t > 0.$$

Teorema 4.4.2 Si los tiempos de falla de un PPNH son $T_1 < T_2 < \dots < T_n$, entonces, condicionado a $T_n = t_n$, las variables aleatorias $T_1 < T_2 < \dots < T_{n-1}$ se distribuyen como los $n - 1$ estadísticos de orden de una variable aleatoria con función de distribución

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(t_n)}, & 0 < t \leq t_n \\ 1, & t > t_n. \end{cases}$$

- Censura por intervalo

En ciertas ocasiones puede resultar muy costoso mantener al personal continuamente en la prueba registrando los tiempos de falla y se opta por hacer inspecciones. En este caso, no se observan los tiempos de fallas sino que solamente se conoce el intervalo de tiempo en el que las fallas se presentaron.

Definición 4.4.4 (Censura por intervalo) Cuando en un estudio no se tiene el tiempo de la falla, sino solamente se sabe que la falla ocurrió en cierto intervalo de tiempo, se dice que el dato registrado presenta censurado por intervalo.

Bajo este escenario, suponga que se tienen n_1, n_2, \dots, n_m fallas independientes registradas en los siguientes intervalos disjuntos, $(a_1, b_1], (a_2, b_2], \dots, (a_m, b_m]$. Haciendo un procedimiento similar al que se utilizó para obtener (4.5), se tiene que la función de verosimilitud es

$$L = \prod_{i=1}^m \frac{\left[\int_{a_i}^{b_i} \lambda(t) dt \right]^{n_i}}{n_i!} \cdot \exp \left[- \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} \lambda(t) dt \right]. \quad (4.7)$$

4.5. Análisis de datos de un sistema reparable

En esta sección se expondrán algunas formas en las que se pueden analizar los tiempos de falla de un sistema reparable. Se comenzará con métodos gráficos clásicos y la manera en que se utilizan para elegir un modelo adecuado para la función de intensidad en el caso de los procesos de Poisson.

4.5.1. Métodos gráficos

Los métodos gráficos pueden ser usados para visualizar datos de un sistema reparable, tener idea del comportamiento de los datos y también para ayudar a tomar una decisión razonable en la selección de un modelo. Una de las principales preguntas que se plantean al momento de analizar estos datos es si los tiempos entre fallas presentan evidencia de tener alguna tendencia, esto es, ¿los tiempos entre fallas tienden a ser más grandes o más pequeños?

Una herramienta sencilla para detectar tendencias en los tiempos entre falla es la gráfica del número acumulado de fallas $N(t_i)$ contra el tiempo global de fallas t_i . En particular, comportamiento no lineal es evidencia en contra del supuesto de que los tiempos entre fallas X_i son *i.i.d.* [11]

Sistemas para los cuales la gráfica de $N(t_i)$ contra t_i muestra un comportamiento lineal es evidencia a favor de que el sistema permanece estable en el tiempo en que los datos fueron recolectados. En este caso, los procesos de renovación y en particular un PPH pueden ser modelos apropiados para los datos si los tiempos entre fallas son independientes. Si la gráfica presenta curvatura, ya sea cóncava o convexa (o posiblemente cóncava en un intervalo y convexa en otro o viceversa), entonces un proceso de renovación no es un modelo adecuado ya que hay evidencia en contra del supuesto de igualdad en ley de probabilidad. Un comportamiento cóncavo en la gráfica indica una mejora en la confiabilidad, pues los tiempos entre falla tienden a ser más grandes, por otro lado, un comportamiento convexo en la gráfica indica un decremento en la confiabilidad, pues los tiempos entre fallas tienden a ser más cortos.

Sistemas para los cuales la gráfica de $N(t_i)$ contra i muestra curvatura, suelen ser modelados con procesos no estacionarios, los cuales describen la ocurrencia de las fallas en el tiempo. Un proceso no estacionario que se utiliza es el PPNH, el cual es un modelo conceptualmente simple, puede modelar sistemas en mejora y en deterioro, además que el proceso de inferencia estadística está considerablemente desarrollado y su realización no es muy complicada. Como ejemplo de tendencia en los datos, en la Figura 4.4 se presenta una gráfica de $N(t)$ contra t para un conjunto de tiempos de falla. En este caso la tendencia es cóncava, lo que indica que los tiempos entre falla tienden a ser más pequeños y como consecuencia se puede decir que el sistema está en deterioro.

4.5.2. Modelos para los PPNH

Para el caso en que los tiempos entre falla presenten tendencia, se puede pensar en los PPNH para modelarlos. En la sección 4.4 se construyeron las funciones de verosimilitud considerando tres tipos de censura, quedando las expresiones en términos de los tiempos (o intervalos) de

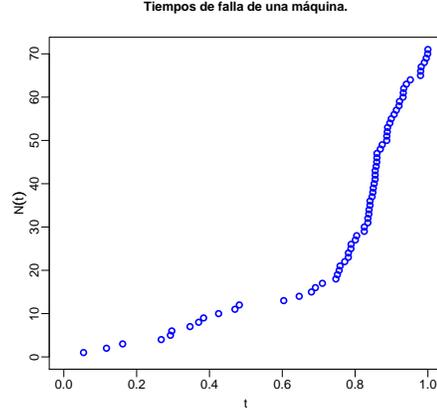


Figura 4.4: Ejemplo de tendencia en tiempos de falla para una máquina de propulsión.

falla y de la función de intensidad. En seguida se presentan algunos modelos para la función de intensidad y las expresiones explícitas correspondientes para la verosimilitud [11].

Función de intensidad log lineal

La función de intensidad log lineal está dada por

$$\lambda(t) = \exp(\beta_0 + \beta_1 t), \quad \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (4.8)$$

Observe que para $\beta_1 < 0$ la confiabilidad del sistema es creciente, pues la función de intensidad es decreciente; por el contrario, si $\beta_1 > 0$ la confiabilidad del sistema es decreciente ya que la función de intensidad es creciente.

Considerando (4.8), la verosimilitud para un sistema reparable observado en el tiempo $(0, t_0]$ y con fallas en $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ (note que \mathbf{t} es el vector de tiempos de falla y no de los tiempos entre falla) es:

$$\begin{aligned} l(\beta_0, \beta_1; \mathbf{t}) &= \log[L(\beta_0, \beta_1; \mathbf{t})] \\ &= \log \left\{ \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_0} \lambda(t) dt \right] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \log[\lambda(t_i)] - \int_0^{t_0} \lambda(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 t_i) - \int_0^{t_0} \exp(\beta_0 + \beta_1 t) dt \\ &= n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^n t_i - \frac{1}{\beta_1} \exp(\beta_0 + \beta_1 t) \Big|_0^{t_0} \\ &= n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^n t_i - \frac{1}{\beta_1} [\exp(\beta_0 + \beta_1 t_0) - \exp(\beta_0)] \\ &= n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^n t_i - \frac{\exp(\beta_0) [\exp(\beta_1 t_0) - 1]}{\beta_1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para obtener los estimadores de máxima verosimilitud se obtienen las parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial \beta_0} &= n - \frac{\exp(\beta_0)[\exp(\beta_1 t_0) - 1]}{\beta_1}, \\ \frac{\partial l}{\partial \beta_1} &= \sum_{i=1}^n t_i - \exp(\beta_0) \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left[\frac{\exp(\beta_1 t_0) - 1}{\beta_1} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n t_i - \exp(\beta_0) \frac{\beta_1 \exp(\beta_1 t_0) t_0 - \exp(\beta_1 t_0) + 1}{\beta_1^2}.\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial \beta_0} = 0 &\implies \frac{\exp(\beta_0)[\exp(\beta_1 t_0) - 1]}{\beta_1} - n = 0 \\ &\implies \frac{\exp(\beta_0)[\exp(\beta_1 t_0) - 1]}{\beta_1} = n \\ &\implies \exp(\beta_0) = \frac{n\beta_1}{\exp(\beta_1 t_0) - 1} \\ &\implies \beta_0 = \log \left[\frac{n\beta_1}{\exp(\beta_1 t_0) - 1} \right], \\ \frac{\partial l}{\partial \beta_1} = 0 &\implies \sum_{i=1}^n t_i - \exp(\beta_0) \left[\frac{t_0 \exp(\beta_1 t_0)}{\beta_1} - \frac{\exp(\beta_1 t_0) - 1}{\beta_1^2} \right] = 0 \\ &\implies \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n\beta_1}{\exp(\beta_1 t_0) - 1} \left[\frac{t_0 \exp(\beta_1 t_0)}{\beta_1} - \frac{\exp(\beta_1 t_0) - 1}{\beta_1^2} \right] = 0 \\ &\implies \sum_{i=1}^n t_i - \frac{nt_0 \exp(\beta_1 t_0)}{\exp(\beta_1 t_0) - 1} + \frac{n\beta_1}{\beta_1^2} = 0 \\ &\implies \sum_{i=1}^n t_i - \frac{nt_0}{1 - \exp(-\beta_1 t_0)} + \frac{n}{\beta_1} = 0 \\ &\implies \sum_{i=1}^n t_i + n\beta_1^{-1} - nt_0[1 - \exp(-\beta_1 t_0)]^{-1} = 0.\end{aligned}$$

Así, se resuelve numéricamente la última ecuación para obtener $\hat{\beta}_1$ y por consiguiente

$$\hat{\beta}_0 = \log \left[\frac{n\hat{\beta}_1}{\exp(\hat{\beta}_1 t_0) - 1} \right].$$

Para tener una idea de la varianza de los estimadores, se calculará la matriz de información observada de Fisher, para esto se calculan el negativo de las segundas derivadas parciales

evaluadas en los EMV.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_0^2} &= \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left\{ n - \frac{\exp(\beta_0)[\exp(\beta_1 t_0) - 1]}{\beta_1} \right\} \\
&= -\frac{\exp(\beta_0)[\exp(\beta_1 t_0) - 1]}{\beta_1}, \\
-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_0^2} \Big|_{\beta_0=\hat{\beta}_0, \beta_1=\hat{\beta}_1} &= \frac{1}{\hat{\beta}_1} \frac{n\hat{\beta}_1}{\exp(\hat{\beta}_1 t_0) - 1} [\exp(\hat{\beta}_1 t_0) - 1], \text{ pues } \beta_0 = \log \left[\frac{n\beta_1}{\exp(\beta_1 t_0) - 1} \right] \\
&= n, \\
\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_1^2} &= \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left\{ \sum_{i=1}^n t_i - \exp(\beta_0) \left[\frac{t_0 \exp(\beta_1 t_0)}{\beta_1} - \frac{\exp(\beta_1 t_0) - 1}{\beta_1^2} \right] \right\} \\
&= -\exp(\beta_0) \left[t_0 \frac{t_0 \beta_1 \exp(\beta_1 t_0) - \exp(\beta_1 t_0)}{\beta_1^2} - \frac{t_0 \beta_1^2 \exp(\beta_1 t_0) - 2\beta_1(\exp(\beta_1 t_0) - 1)}{\beta_1^4} \right] \\
&= -\exp(\beta_0) \left[\frac{t_0^2 \exp(\beta_1 t_0)}{\beta_1} - \frac{t_0 \exp(\beta_1 t_0)}{\beta_1^2} - \frac{t_0 \exp(\beta_1 t_0)}{\beta_1^2} + \frac{2(\exp(\beta_1 t_0) - 1)}{\beta_1^3} \right] \\
&= -\exp(\beta_0) \left[\frac{t_0^2 \exp(\beta_1 t_0)}{\beta_1} - \frac{2t_0 \exp(\beta_1 t_0)}{\beta_1^2} + \frac{2(\exp(\beta_1 t_0) - 1)}{\beta_1^3} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_1^2} \Big|_{\beta_0=\hat{\beta}_0, \beta_1=\hat{\beta}_1} &= \frac{n\hat{\beta}_1}{\exp(\hat{\beta}_1 t_0) - 1} \left[\frac{t_0^2 \exp(\hat{\beta}_1 t_0)}{\hat{\beta}_1} - \frac{2t_0 \exp(\hat{\beta}_1 t_0)}{(\hat{\beta}_1)^2} + \frac{2(\exp(\hat{\beta}_1 t_0) - 1)}{(\hat{\beta}_1)^3} \right] \\
&= \frac{nt_0^2}{1 - \exp(-\hat{\beta}_1 t_0)} - \frac{2nt_0}{\hat{\beta}_1 [1 - \exp(-\hat{\beta}_1 t_0)]} + \frac{2n}{(\hat{\beta}_1)^2} \\
&= t_0 \cdot \frac{nt_0}{1 - \exp(-\hat{\beta}_1 t_0)} - \frac{2}{\hat{\beta}_1} \cdot \frac{nt_0}{1 - \exp(-\hat{\beta}_1 t_0)} + \frac{2n}{(\hat{\beta}_1)^2} \\
&= t_0 \left[\sum_{i=1}^n t_i + \frac{n}{\hat{\beta}_1} \right] - \frac{2}{\hat{\beta}_1} \left[\sum_{i=1}^n t_i + \frac{n}{\hat{\beta}_1} \right] + \frac{2n}{(\hat{\beta}_1)^2} \\
&= t_0 \sum_{i=1}^n t_i + \frac{nt_0}{\hat{\beta}_1} - \frac{2 \sum_{i=1}^n t_i}{\hat{\beta}_1} \\
&= \frac{1}{\hat{\beta}_1} \left[t_0 \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n t_i + nt_0 - 2 \sum_{i=1}^n t_i \right] \\
&= \frac{1}{\hat{\beta}_1} \left[\sum_{i=1}^n t_i (t_0 \hat{\beta}_1 - 2) + nt_0 \right], \\
\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} &= \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left[n - \frac{\exp(\beta_0)[\exp(\beta_1 t_0) - 1]}{\beta_1} \right] \\
&= -\exp(\beta_0) \frac{\beta_1 t_0 \exp(\beta_1 t_0) - \exp(\beta_1 t_0) + 1}{(\beta_1)^2} \\
&= -\exp(\beta_0) \left[\frac{t_0 \exp(\beta_1 t_0)}{\beta_1} - \frac{\exp(\beta_1 t_0) - 1}{\beta_1^2} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} \Big|_{\beta_0 = \hat{\beta}_0, \beta_1 = \hat{\beta}_1} &= \exp(\hat{\beta}_0) \left[\frac{t_0 \exp(\hat{\beta}_1 t_0)}{\hat{\beta}_1} - \frac{\exp(\hat{\beta}_1 t_0) - 1}{(\hat{\beta}_1)^2} \right] \\
&= \frac{n \hat{\beta}_1}{\exp(\hat{\beta}_1 t_0) - 1} \left[\frac{t_0 \exp(\hat{\beta}_1 t_0)}{\hat{\beta}_1} - \frac{\exp(\hat{\beta}_1 t_0) - 1}{(\hat{\beta}_1)^2} \right] \\
&= \frac{n \hat{\beta}_1 t_0 \exp(\hat{\beta}_1 t_0)}{(\exp(\hat{\beta}_1 t_0) - 1) \hat{\beta}_1} - \frac{n}{\hat{\beta}_1} \\
&= \frac{nt_0}{1 - \exp(-\hat{\beta}_1 t_0)} - \frac{n}{\hat{\beta}_1} \\
&= \sum_{i=1}^n t_i.
\end{aligned}$$

De modo que la matriz de información observada de Fisher es

$$I(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \frac{1}{\hat{\beta}_1} \left[\sum_{i=1}^n t_i (t_0 \hat{\beta}_1 - 2) + nt_0 \right] \end{pmatrix},$$

con inversa dada por

$$I^{-1}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\beta}_1} \left[\sum_{i=1}^n t_i (t_0 \hat{\beta}_1 - 2) + nt_0 \right] - \sum_{i=1}^n t_i & \\ - \sum_{i=1}^n t_i & n \end{pmatrix},$$

donde k es el determinante de $I(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$.

De lo anterior, la varianza estimada aproximada de, por ejemplo, $\hat{\beta}_1$ es:

$$\begin{aligned}
\hat{V}(\hat{\beta}_1) &\approx \frac{n}{k} \\
&= \frac{n}{\frac{n \left[\sum_{i=1}^n t_i (t_0 \hat{\beta}_1 - 2) + nt_0 \right] - \hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}{\hat{\beta}_1}} \\
&= \frac{n \hat{\beta}_1}{n \left[\sum_{i=1}^n t_i (t_0 \hat{\beta}_1 - 2) + nt_0 \right] - \hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2} \\
&= \left\{ (\hat{\beta}_1)^{-1} \left[\sum_{i=1}^n t_i (t_0 \hat{\beta}_1 - 2) + nt_0 \right] - n^{-1} \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2 \right\}^{-1}.
\end{aligned}$$

Al evaluar la log verosimilitud en los estimadores, se tiene que el valor máximo de esta es

$$\begin{aligned}
l(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1; \mathbf{t}) &= n \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n t_i - \frac{\exp(\hat{\beta}_0) [\exp(\hat{\beta}_1 t_0) - 1]}{\hat{\beta}_1} \\
&= n \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n \hat{\beta}_1}{\exp(\hat{\beta}_1 t_0) - 1} \frac{[\exp(\hat{\beta}_1 t_0) - 1]}{\hat{\beta}_1} \\
&= n \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n t_i - n \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Una hipótesis a probar que surge de manera natural en la inferencia para los sistemas reparables es si la función de intensidad es constante, esto es, para este caso $H : \beta_1 = 0$, la cual se puede probar por diferentes métodos.

- Prueba de razón de verosimilitudes

Se desarrollará la prueba de razón de verosimilitudes para la hipótesis $H : \beta_1 = 0$. Si $\beta_1 = 0$, entonces la log verosimilitud es

$$\begin{aligned} l_0(\beta_0, 0; \mathbf{t}) &= \log [L(\beta_0, 0; \mathbf{t})] \\ &= \log \left\{ \prod_{i=1}^n \exp(\beta_0 + 0t_i) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_0} \exp(\beta_0 + 0t) dt \right] \right\} \\ &= n\beta_0 - t_0 \exp(\beta_0). \end{aligned}$$

Se calcula la derivada y se resuelve la ecuación cuando se iguala a cero

$$\frac{dl_0}{d\beta_0} = n - t_0 \exp(\beta_0), \quad \frac{dl_0}{d\beta_0} = 0 \implies \hat{\beta}_0 = \log \left(\frac{n}{t_0} \right).$$

Así, bajo H , la verosimilitud maximizada es $l_0(\hat{\beta}_0, 0) = n \log \left(\frac{n}{t_0} \right) - n$, y el estadístico de prueba es

$$\begin{aligned} D &= -2 \log \left[\frac{L_0(\hat{\beta}_0, 0; \mathbf{t})}{L(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1; \mathbf{t})} \right] \\ &= 2 \left[l(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1; \mathbf{t}) - l_0(\hat{\beta}_0, 0; \mathbf{t}) \right] \\ &= 2 \left[n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n t_i - n - n \log \left(\frac{n}{t_0} \right) + n \right] \\ &= 2 \left[n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n t_i - n \log \left(\frac{n}{t_0} \right) \right] \sim \chi_{(1)}^2, \text{ asintóticamente.} \end{aligned}$$

Grandes valores de D son evidencia en contra de H , la región de rechazo es $\{D : D > \chi_{1,0.95}^2\}$, donde $\chi_{1,0.95}^2$ es el cuantil 0.95 de la distribución ji cuadrada con un grado de libertad.

- Prueba de Laplace

Una prueba más común para la hipótesis $H : \beta_1 = 0$ es la prueba de Laplace. Se presentará la situación específica en la que se considera censura tipo I, es decir, en la que se ha observado un sistema reparable hasta un tiempo predeterminado t_0 registrándose n tiempos de fallas. Del Teorema 4.4.2, los tiempos $T_1 < T_2 < \dots < T_n$ se distribuyen como n estadísticos de orden de una distribución uniforme en $(0, t_0)$, de modo que la suma $\sum_{i=1}^n T_i$ se distribuye como la suma de n variables aleatorias uniformes en $(0, t_0)$ con media $\frac{t_0}{2}$ y varianza $\frac{t_0^2}{12}$. Así, utilizando el teorema central del límite, para n suficientemente grande, el estadístico

$$\begin{aligned} U &= \frac{\sum_{i=1}^n T_i - n \frac{t_0}{2}}{\sqrt{\frac{nt_0^2}{12}}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n T_i - \frac{nt_0}{2}}{t_0 \sqrt{\frac{n}{12}}} \end{aligned} \tag{4.11}$$

tiene una distribución aproximada normal estándar.

De (4.11) y con un nivel de significancia α , la hipótesis nula $H : \beta_1 = 0$ se rechazará si $|U| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, donde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la distribución normal estándar. Grandes valores de U significan que la suma de los tiempos de falla son más grandes de lo esperado, lo cual sugiere que el sistema está en deterioro. Por el contrario, valores pequeños de U sugieren una mejora en el sistema, pues los tiempos parecen ser más pequeños de lo esperado.

Ahora bien, bajo H , considerando censura tipo II y que la observación del sistema se efectuó hasta registrar la n -ésima falla, el estadístico a utilizar, el cual también tiene una distribución aproximada normal estándar, es

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} T_i - \frac{(n-1)t_n}{2}}{t_n \sqrt{\frac{n-1}{12}}}. \quad (4.12)$$

La prueba de Laplace es asintóticamente equivalente a la prueba de razón de verosimilitudes pero la prueba de Laplace no requiere de los EMV para los parámetros.

Función de intensidad potencia (o Weibull)

La función de intensidad potencia (o Weibull) está dada por

$$\lambda(t) = \gamma \delta t^{\delta-1}, \quad \gamma > 0, \delta > 0, t \geq 0. \quad (4.13)$$

Considerando (4.13) y que se registran los siguientes tiempos de falla $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ con un tiempo de censura tipo I de t_0 , la log verosimilitud es

$$\begin{aligned} l(\gamma, \delta; \mathbf{t}) &= \log[L(\gamma, \delta; \mathbf{t})] \\ &= \log \left\{ \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_0} \lambda(t) dt \right] \right\} \\ &= \log \left\{ \prod_{i=1}^n \gamma \delta t_i^{\delta-1} \cdot \exp \left[- \int_0^{t_0} \gamma \delta t^{\delta-1} dt \right] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n [\log(\gamma \delta) + (\delta - 1) \log(t_i)] - \gamma \delta \int_0^{t_0} t^{\delta-1} dt \\ &= n \log(\gamma) + n \log(\delta) + (\delta - 1) \sum_{i=1}^n \log(t_i) - \gamma t_0^\delta. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para obtener los estimadores de máxima verosimilitud se calculan las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \delta} &= \frac{n}{\delta} + \sum_{i=1}^n \log(t_i) - \gamma t_0^\delta \log(t_0), \\ \frac{\partial l}{\partial \gamma} &= \frac{n}{\gamma} - t_0^\delta. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \gamma} = 0 &\implies \gamma = \frac{n}{t_0^\delta}, \\
\frac{\partial l}{\partial \delta} = 0 &\implies \frac{n}{\delta} + \sum_{i=1}^n \log(t_i) - \gamma t_0^\delta \log(t_0) = 0 \\
&\implies \frac{n}{\delta} + \sum_{i=1}^n \log(t_i) - \frac{n}{t_0^\delta} t_0^\delta \log(t_0) = 0 \\
&\implies \frac{n}{\delta} + \sum_{i=1}^n \log(t_i) - n \log(t_0) = 0 \\
&\implies \delta = \frac{n}{n \log(t_0) - \sum_{i=1}^n \log(t_i)}, \text{ de modo que los EMV son} \\
&\quad \hat{\delta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log\left(\frac{t_0}{t_i}\right)}, \quad \hat{\gamma} = \frac{n}{t_0^{\hat{\delta}}}.
\end{aligned}$$

Para obtener la inversa de la matriz de información observada se calculan las segundas derivadas parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l}{\partial \delta^2} &= -\frac{n}{\delta^2} - \gamma \log^2(t_0) t_0^\delta, \\
-\frac{\partial^2 l}{\partial \delta^2} \Big|_{\delta=\hat{\delta}, \gamma=\hat{\gamma}} &= \frac{n}{(\hat{\delta})^2} + \log^2(t_0) \hat{\gamma} t_0^{\hat{\delta}}, \\
&= \frac{n}{(\hat{\delta})^2} + n \log^2(t_0), \text{ pues } \hat{\gamma} = \frac{n}{t_0^{\hat{\delta}}}, \\
\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma^2} &= -\frac{n}{\gamma^2}, \\
-\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma^2} \Big|_{\delta=\hat{\delta}, \gamma=\hat{\gamma}} &= \frac{n}{(\hat{\gamma})^2}, \\
\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma \partial \delta} &= -t_0^\delta \log(t_0), \\
-\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma \partial \delta} \Big|_{\delta=\hat{\delta}, \gamma=\hat{\gamma}} &= t_0^{\hat{\delta}} \log(t_0).
\end{aligned}$$

De los cálculos anteriores para las derivadas parciales, la matriz de información observada de Fisher es

$$I(\hat{\gamma}, \hat{\delta}) = \begin{pmatrix} \frac{n}{(\hat{\gamma})^2} & t_0^{\hat{\delta}} \log(t_0) \\ t_0^{\hat{\delta}} \log(t_0) & \frac{n}{(\hat{\delta})^2} + n \log^2(t_0) \end{pmatrix},$$

con inversa

$$I^{-1}(\hat{\gamma}, \hat{\delta}) = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \frac{n}{(\hat{\delta})^2} + n \log^2(t_0) & -t_0^{\hat{\delta}} \log(t_0) \\ -t_0^{\hat{\delta}} \log(t_0) & \frac{n}{(\hat{\gamma})^2} \end{pmatrix},$$

donde k es el determinante de I .

Note que si la unidad de tiempo es elegida de tal forma que $t_0 = 1$, se tiene que los EMV se simplifican y están dados por

$$\hat{\delta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(t_i)}, \quad \hat{\gamma} = n,$$

y la matriz de información observada de Fisher y su inversa son

$$I(\widehat{\gamma}, \widehat{\delta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{n}{(\widehat{\delta})^2} \end{pmatrix}, \quad I^{-1}(\widehat{\gamma}, \widehat{\delta}) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{(\widehat{\delta})^2}{n} \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Regresando al caso general de t_0 , una hipótesis natural para probar es $H : \delta = 1$, para la cual se tiene la siguiente prueba:

■ Prueba MIL-HDBK 189

Esta prueba es quizá la más utilizada para esta función de intensidad debido a que es óptima. Considerando que se registraron los tiempos de falla t_1, t_2, \dots, t_n hasta un tiempo de censura tipo I t_0 , el estadístico de prueba es

$$V = \frac{2n}{\widehat{\delta}} = 2 \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{t_0}{t_i} \right). \quad (4.15)$$

De la relación anterior, se observa que valores grandes de V implican valores pequeños de $\widehat{\delta}$ y viceversa. La distribución del estadístico bajo la hipótesis nula se establece en el siguiente teorema.

Teorema 4.5.1 *Para los tiempos de falla t_1, t_2, \dots, t_n registrados bajo un tiempo de censura tipo I t_0 , bajo la hipótesis $H : \delta = 1$, se tiene la siguiente distribución del estadístico de prueba*

$$\begin{aligned} V &= \frac{2n}{\widehat{\delta}} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{t_0}{t_i} \right) \sim \chi_n^2. \end{aligned}$$

Demostración. Con base en el teorema 4.4.2, se tiene que, condicionado a $N(t_0) = n$, las variables aleatorias T_1, T_2, \dots, T_n se distribuyen como estadísticos de orden de la distribución

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(t_0)}, & 0 < t \leq t_0 \\ 1, & t > t_0. \end{cases}$$

Para este caso, $\Lambda(t) = \gamma t^\delta$, de donde

$$\frac{\Lambda(t)}{\Lambda(t_0)} = \frac{\gamma t^\delta}{\gamma t_0^\delta} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^\delta,$$

de modo que

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \left(\frac{t}{t_0} \right)^\delta, & 0 < t \leq t_0 \\ 1, & t > t_0. \end{cases}$$

Sea $Y \sim G$ y considere $Z = \left(\frac{Y}{t_0}\right)^\delta$, entonces

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= P\left[\left(\frac{Y}{t_0}\right)^\delta \leq z\right] \\ &= P\left(Y \leq t_0 z^{\frac{1}{\delta}}\right) \\ &= \left(\frac{t_0 z^{\frac{1}{\delta}}}{t_0}\right)^\delta \\ &= z. \end{aligned}$$

Así, con base en lo anterior, se tiene que $Z = \left(\frac{Y}{t_0}\right)^\delta \sim U(0, 1)$, por lo tanto, las cantidades $\left(\frac{T_i}{t_0}\right)^\delta$, $i = 1, 2, \dots, n$ se distribuyen como n estadísticos de orden de una distribución $U(0, 1)$. Considerando que $U \sim U(0, 1) \implies -\log(U) \sim \text{EXP}(1)$, se tiene que $-\log\left[\left(\frac{T_i}{t_0}\right)^\delta\right] = \delta \log\left(\frac{t_0}{T_i}\right) \sim \text{EXP}(1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, lo que implica $\delta \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{t_0}{T_i}\right) \sim \chi_n^2$ y bajo H , $\sum_{i=1}^n \log\left(\frac{t_0}{T_i}\right) \sim \chi_n^2$. \square

Una consecuencia de considerar esta función de intensidad es que el primer tiempo de falla tiene una distribución Weibull, pues

$$\begin{aligned} P(T_1 > t) &= \exp\left[-\int_0^t \lambda(x) dx\right] \\ &= \exp(-\gamma t^\delta). \end{aligned}$$

Función de intensidad log lineal potencia

Se presenta el análisis estadístico considerando la siguiente función de intensidad

$$\lambda(t) = \alpha \delta t^{\delta-1} \exp(\beta t), \quad t \geq 0, \alpha > 0, \delta > 0, \beta \in \mathbb{R}, \quad (4.16)$$

la cual generaliza a las funciones de intensidad log lineal y de potencia, expuestas anteriormente [21].

Suponiendo que se ha observado un sistema reparable hasta un tiempo t_0 , registrándose n tiempos de falla $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ y considerando que los eventos siguen un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad dada por (4.16), la densidad conjunta y la función de verosimilitud están dadas por, respectivamente,

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_n, N}(t_1, t_2, \dots, t_n, n) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \exp\left[-\int_0^{t_0} \lambda(t) dt\right], \quad 0 < t_1 < \dots < t_n < t_0,$$

$$\begin{aligned}
L(\alpha, \delta, \beta; \mathbf{t}, n) &= \left[\prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \right] \exp \left[- \int_0^{t_0} \lambda(t) dt \right] \\
&= \left[\prod_{i=1}^n \alpha \delta t_i^{\delta-1} \exp(\beta t_i) \right] \exp \left[- \int_0^{t_0} \alpha \delta t^{\delta-1} \exp(\beta t) dt \right] \\
&= (\alpha \delta)^n \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{\delta-1} \exp \left(\beta \sum_{i=1}^n t_i \right) \exp \left[- \alpha \delta \int_0^{t_0} t^{\delta-1} \exp(\beta t) dt \right], \quad (4.17)
\end{aligned}$$

de donde se observa que $\prod_{i=1}^n T_i$ y $\sum_{i=1}^n T_i$ son estadísticos suficientes para los parámetros δ y β , respectivamente.

- Prueba de la hipótesis $H : \beta = 0$ (reducción al modelo Weibull)

Se presentan algunos resultados que serán de utilidad en el desarrollo de la prueba. El primero exhibe la densidad de los estadísticos de orden en forma individual y en forma conjunta de una muestra aleatoria ([24]) y el segundo resultado muestra una relación entre variables aleatorias con distribuciones Gamma y Beta.

Teorema 4.5.2 Si Y_1, Y_2, \dots, Y_n es una muestra aleatoria de la densidad f_Y , entonces

1.

$$f_{Y_{(i)}}(y) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F_Y(y)]^{i-1} [1 - F_Y(y)]^{n-i} f_Y(y).$$

2.

$$f_{Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}}(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} n! \prod_{i=1}^n f_Y(y_i), & y_1 < y_2 < \dots < y_n \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 4.5.3 Si X_i son v.a.i. tales que $X_i \sim \text{GAMMA}(\alpha_i, \beta)$, $i = 1, 2$, entonces

$$\frac{X_1}{X_1 + X_2} \sim \text{BETA}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Ahora se procede a construir el estadístico para la prueba. Para que la distribución condicional nula no dependa del tiempo hasta el cual se observó, es decir, de t_0 , y considerando que las transformaciones

$$g_1(x) = \frac{x}{t_0}, \quad t_0 > 0, \quad g_2(x) = \ln(x), \quad x > 0 \quad \text{y} \quad g_3(x) = -x \quad \text{son} \quad 1-1,$$

se trabajarán con los estadístico $W' = - \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{T_i}{t_0} \right)$, $S' = \sum_{i=1}^n \frac{T_i}{t_0}$, los cuales siguen siendo suficientes para los parámetros mencionados.

Condicionando sobre $\{N(t_0) = n\}$ y recordando que $N(t_0) \sim \text{POISSON} \left(\int_0^{t_0} \lambda(t) dt \right)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
g(t_1, \dots, t_n | n) &= \frac{f_{T_1, \dots, T_N, N}(t_1, \dots, t_n, n)}{P[N(t_0) = n]} \\
&= \frac{(\alpha \delta)^n \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{\delta-1} \exp(\beta \sum_{i=1}^n t_i) \exp \left[- \alpha \delta \int_0^{t_0} t^{\delta-1} \exp(\beta t) dt \right]}{\frac{1}{n!} \left[\alpha \delta \int_0^{t_0} t^{\delta-1} \exp(\beta t) dt \right]^n \exp \left[- \alpha \delta \int_0^{t_0} t^{\delta-1} \exp(\beta t) dt \right]} \\
&= n! \left[\int_0^{t_0} t^{\delta-1} \exp(\beta t) dt \right]^{-n} \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{\delta-1} \exp \left(\beta \sum_{i=1}^n t_i \right) \\
&= n! \left[\int_0^{t_0} t^{\delta-1} \exp(\beta t) dt \right]^{-n} \prod_{i=1}^n t_i^{\delta-1} \exp(\beta t_i), \quad 0 < t_1 < \dots < t_n < t_0.
\end{aligned}$$

Así, condicionado a $\{N(t_0) = n\}$ y con base en el Teorema 4.5.2, se tiene que las variables aleatorias T_1, T_2, \dots, T_n se distribuyen como estadísticos de orden de una muestra aleatoria de tamaño n de la densidad

$$f_{t_0}(x) = \left[\int_0^{t_0} z^{\delta-1} \exp(\beta z) dz \right]^{-1} x^{\delta-1} \exp(\beta x), \quad 0 < x < t_0. \quad (4.18)$$

Ya que las distribuciones de S' y W' , al ser determinadas por las variables ordenadas, es la misma que si se obtiene de una muestra aleatoria de tamaño n de la densidad (4.18), entonces se derivará la distribución condicional nula con base en una muestra aleatoria T_1, T_2, \dots, T_n de la densidad en consideración.

Tomando en cuenta que W' es suficiente para δ , es decir, la distribución condicional de S' dado W' no depende de δ , y bajo la hipótesis $H : \beta = 0$, de (4.18) se tiene

$$\begin{aligned} f_{t_0}(x) &= \left[\int_0^{t_0} z^{1-1} \exp(0z) dz \right]^{-1} x^{1-1} \exp(0x) \\ &= \frac{1}{t_0}, \quad 0 < x < t_0. \end{aligned}$$

De lo anterior, la distribución condicional nula se puede obtener utilizando una muestra aleatoria $\frac{T_i}{t_0}$, $i = 1, 2, \dots, n$ de una distribución $U(0, 1)$, lo que implica que las variables $V_j = -\ln(T_j/t_0)$, $j = 1, \dots, n$ son independientes con distribución EXP(1). Por otro lado, definiendo $W_j = (V_1 + \dots + V_j)/(V_1 + \dots + V_n)$, $j = 1, \dots, n-1$, se tiene que la suma $V_1 + \dots + V_n$ es independiente de W_j , $j = 1, \dots, n-1$. Un ejemplo de lo anterior se obtiene considerando $X = V_1 + V_2$, $Y = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$ y obteniendo la densidad conjunta de X, Y . En efecto, utilizando el método de la transformación ([24]), se tiene que

$$v_1 = xy, \quad v_2 = x - xy, \quad J = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -x,$$

de donde

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_{V_1,V_2}(v_1 = xy, v_2 = x - xy) |J| \\ &= \exp(-(xy + x - xy)) | -x | \\ &= x \exp(-x) \\ &= \frac{x^{2-1}}{\Gamma(2)} \exp(-x), \quad x > 0, 0 < y < 1, \end{aligned}$$

que es el producto de las densidades de dos variables aleatorias: una con distribución GAMMA(2, 1) y otra con distribución $U(0, 1)$, que son precisamente las distribuciones de $X = V_1 + V_2$ y $Y = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$, respectivamente. Así, concluimos que $V_1 + V_2$ y $\frac{V_1}{V_1 + V_2}$ son independientes.

Considerando una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_{n-1} de una distribución $U(0, 1)$ y con base en el Teorema 4.5.2, el i -ésimo estadístico de orden tiene densidad

$$f_{X_{(i)}}(x) = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-1-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-1-i}, \quad 0 < x < 1. \quad (4.19)$$

Por otro lado, del teorema 4.5.3 se tiene que $W_j = (V_1 + \dots + V_j)/(V_1 + \dots + V_j + V_{j+1} + \dots + V_n) \sim \text{BETA}(j, n-j)$, pues $V_1 + \dots + V_j \sim \text{GAMMA}(j, 1)$, $V_{j+1} + \dots + V_n \sim \text{GAMMA}(n-j, 1)$

y además $V_1 + \dots + V_j$ es independiente de $V_{j+1} + \dots + V_n$, lo que implica que

$$\begin{aligned} f_{W_j}(w) &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(j)\Gamma(n-j)} w^{j-1} (1-w)^{n-1-j} \\ &= \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-1-j)!} w^{j-1} (1-w)^{n-1-j} \quad 0 < w < 1, \end{aligned}$$

la cual coincide con (4.19), es decir, W_j , $j = 1, \dots, n-1$ se distribuyen como estadísticos de orden de una muestra aleatoria de tamaño $n-1$ de una distribución $U(0, 1)$.

Definiendo $W_0 = 0$ y $W_n = 1$ se tiene

$$S' = \sum_{i=1}^n \frac{T_i}{t_0} = \sum_{i=1}^n \exp[-W'(W_j - W_{j-1})], \quad (4.20)$$

donde $W' = \sum_{i=1}^n V_i$.

Para utilizar (4.20), con base en los tiempos de falla t_1, \dots, t_n , se calcula $w' = -\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{t_i}{t_0}\right)$ y la distribución condicional nula es generada de $n-1$ variables aleatorias ordenadas de una distribución $U(0, 1)$. Así, para probar la hipótesis $H : \beta = 0$, utilizando (4.20) se estima el p -valor requerido.

■ Prueba de la hipótesis $H : \delta = 1$ (reducción al modelo log lineal)

En la construcción de la prueba se utilizarán los estadísticos $W = -\sum_{i=1}^n \ln(T_i)$ y $S = \sum_{i=1}^n T_i$. Ya que S es suficiente para β , se considerará $-\beta|S$, además bajo $H : \delta = 1$, de (4.18) se tiene

$$\begin{aligned} f_{t_0}(x) &= \left[\int_0^{t_0} \exp(-|\beta|z) dz \right]^{-1} \exp(-|\beta|x) \\ &= -\frac{|\beta|}{\exp(-|\beta|t_0) - 1} \exp(-|\beta|x), \quad 0 < x < t_0, \end{aligned}$$

de donde,

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} f_{t_0}(x) = |\beta| \exp(-|\beta|x), \quad x > 0,$$

de modo que para valores grandes de t_0 , la distribución condicional nula se puede obtener de las *v.a.i.* T_1, \dots, T_n , las cuales tienen una distribución aproximada exponencial de parámetro $|\beta|$.

Definiendo $U_0 = 0$, $U_n = 1$ y $U_j = (T_1 + \dots + T_j)/S$, $j = 1, \dots, n-1$, donde $S = \sum_{i=1}^n T_i$, se tiene

$$W = -\sum_{i=1}^n \ln(T_i) = -\sum_{i=1}^n \ln[S(U_j - U_{j-1})], \quad (4.21)$$

donde U_1, \dots, U_{n-1} son independientes de S y se distribuyen como estadísticos de orden de una muestra aleatoria de tamaño $n-1$ de una distribución $U(0, 1)$.

Para utilizar (4.21), con base en los tiempos de falla t_1, \dots, t_n , se calcula $s = \sum_{i=1}^n t_i$ y la distribución condicional nula es generada a partir de $n-1$ variables aleatorias independientes ordenadas de una distribución $U(0, 1)$. Así, para probar la hipótesis $H : \delta = 1$, utilizando (4.21) se estima el p -valor requerido.

4.5.3. Elección de un modelo PPNH

En la sección anterior se expusieron algunos métodos basados en la verosimilitud para ajustar un PPNH tomando en cuenta algunas funciones de intensidad, sin embargo surge la siguiente pregunta: ¿cómo decidir cuál de los modelos para la función de intensidad es adecuado? Más generalmente, estamos interesados en elegir una forma razonable para la función de intensidad $\lambda(t)$. Para tratar de responder la pregunta, se expondrán algunos métodos gráficos, de los cuales algunos están basados en la gráfica de $N(t_i)$ contra t_i [11].

Un estimador natural de $\lambda(t)$ es el siguiente

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\text{número de fallas en } (t, t + \Delta t]}{\Delta t}, \quad (4.22)$$

para algún $\Delta t > 0$ adecuado. La elección de Δt es arbitraria, pero, al igual que la elección del número de clases de un histograma, la idea es elegir un Δt de tal forma que se obtenga la máxima información de los datos.

Como se ha mencionado, al graficar $N(t)$ contra t y no observar un comportamiento lineal, hay evidencia en contra de una función de intensidad constante a favor de una no constante. Con la gráfica anterior, se puede observar si la función de intensidad es creciente o decreciente, sin embargo, la forma precisa de $\lambda(t)$ no es clara.

Por otro lado, se tiene que

$$E[N(t)] = \int_0^t \lambda(x) dx,$$

de modo que cuando la intensidad es log lineal

$$E[N(t)] = \frac{\exp(\beta_0)}{\beta_1} [\exp(\beta_1 t) - 1], \quad (4.23)$$

y cuando la intensidad es de potencia

$$E[N(t)] = \gamma t^\delta. \quad (4.24)$$

Un estimador natural de $E[N(t)]$ es $N(t)$, es decir, el número observado de fallas hasta el tiempo t . Así, de (4.24) se tiene que $\log\{E[N(t)]\} = \log(\gamma) + \delta \log(t)$, lo que implica que una gráfica de $\log\{N(t)\}$ contra $\log(t)$ sería fuertemente lineal con intercepto $\log(\gamma)$ y pendiente δ si la intensidad potencia es adecuada.

Una gráfica equivalente es la *gráfica de Duane* ([13]), en la cual se grafica $\log\left[\frac{t_i}{N(t_i)}\right]$ contra $\log(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. A la cantidad $\frac{N(t_i)}{t_i}$ se le llama frecuentemente la *tasa acumulada de fallas*. Si la función de intensidad de potencia fuera adecuada, la gráfica de Duane será fuertemente lineal, pues de (4.24) se tiene $\log\{E[N(t)]\} = \log(\gamma) + \delta \log(t)$, de donde $\log\left[\frac{E[N(t)]}{t}\right] = \log(\gamma) + (\delta - 1) \log(t)$, es decir, $\log\left(\frac{t}{E[N(t)]}\right) = (1 - \delta) \log(t) - \log(\gamma)$. Esta gráfica fue desarrollada para situaciones en las cuales se espera un crecimiento de la confiabilidad ($\delta < 1$), de modo que la pendiente se espera que sea positiva.

Considerando (4.22), si dividimos el periodo de observaciones $(0, t_0]$ en k intervalos $(0, a_1], (a_1, a_2], \dots, (a_{k-1}, t_0]$, entonces una estimación de $\lambda\left[\frac{1}{2}(a_{j-1} + a_j)\right]$ es

$$\hat{\lambda}\left[\frac{1}{2}(a_{j-1} + a_j)\right] = \frac{N(a_j) - N(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}},$$

para $j = 1, 2, \dots, k$, donde $a_0 = 0$ y $a_k = t_0$. Por lo tanto, una gráfica de $\widehat{\lambda}(b_j)$ contra b_j , con $b_j = \frac{1}{2}(a_{j-1} + a_j)$, proporcionará una indicación de la forma de la función de intensidad. La elección de k y los a_j 's se dejan a consideración del usuario. Es recomendable utilizar varias subdivisiones para corroborar que la impresión visual dada por la gráfica no depende fuertemente de la subdivisión seleccionada.

Una gráfica de $\log[\widehat{\lambda}(b_j)]$ contra b_j será fuertemente lineal con pendiente β_1 e intercepto β_0 si la función de intensidad log lineal es apropiada. Este procedimiento puede ser útil para proporcionar valores iniciales en el cálculo de los EMV para β_0 y β_1 . Por otro lado, una gráfica de $\log[\widehat{\lambda}(b_j)]$ contra $\log(b_j)$ será fuertemente lineal con pendiente $\delta - 1$ e intercepto $\log(\gamma) + \log(\delta)$ si la función de intensidad de potencia es apropiada.

4.6. Mantenimiento en sistemas reparables

Recientemente existe una considerable presión en organizaciones de manufactura y servicios para ser competitivos y proveer a tiempo productos de calidad. Este ambiente ha provocado a gerentes e ingenieros el interés en la optimización de los sistemas involucrados en sus organizaciones. El mantenimiento, como un sistema, desarrolla un papel importante para consolidar las metas y objetivos. Contribuye a la reducción de costos, minimización del tiempo en el cual se tienen equipos fuera de operación, mejora de la calidad, incremento de la productividad, etc. Los costos de mantenimiento constituyen una parte muy importante en los costos totales de operación de los procesos en los que están involucradas manufactura o plantas de producción. Dependiendo de la industria especificada, pueden representar entre 15 y 16 por ciento de los costos de producción.

En general, el *mantenimiento* puede definirse como la combinación de actividades por las cuales un equipo o sistema es conservado o puesto en un estado en el cual puede desarrollar las funciones para las cuales fue diseñado. El mantenimiento puede ser considerado como un sistema, esto es, un conjunto de actividades llevadas a cabo en paralelo con los sistemas de producción.

Un diagrama que muestra la relación entre los objetivos de la organización, los procesos de producción y el mantenimiento se muestra en la Figura 4.5. Los sistemas de producción son usualmente concebidos con entradas tales como materiales, trabajo y procesos en productos que satisfagan necesidades de consumidores. La principal salida de un sistema de producción son productos terminados; una segunda salida es falla de algún equipo. Esta salida secundaria genera demanda para mantenimiento. El sistema de mantenimiento toma a ésta como entrada y produce equipo en buenas condiciones que provee capacidad para producción.

Se pueden distinguir, a grandes rasgos, dos tipos de mantenimiento: el mantenimiento correctivo y el mantenimiento preventivo. Por *mantenimiento correctivo* podemos entender toda acción de emergencia, reparación o no programada que se realiza en los sistemas para que continúen con sus tareas. Las reparaciones siempre serán necesarias, sin embargo, la mejora del mantenimiento preventivo pueden reducir la necesidad de correcciones de emergencia.

4.6.1. Mantenimiento preventivo

El mantenimiento preventivo se puede definir como una serie de acciones o tareas pre-diseñadas para hacer frente a las potenciales causas de falla conocidas. Puede ser planeado y calendarizado basado en el tiempo, uso o condiciones del equipo. Es preferible al mantenimiento correctivo, al menos, por cuatro principales razones:

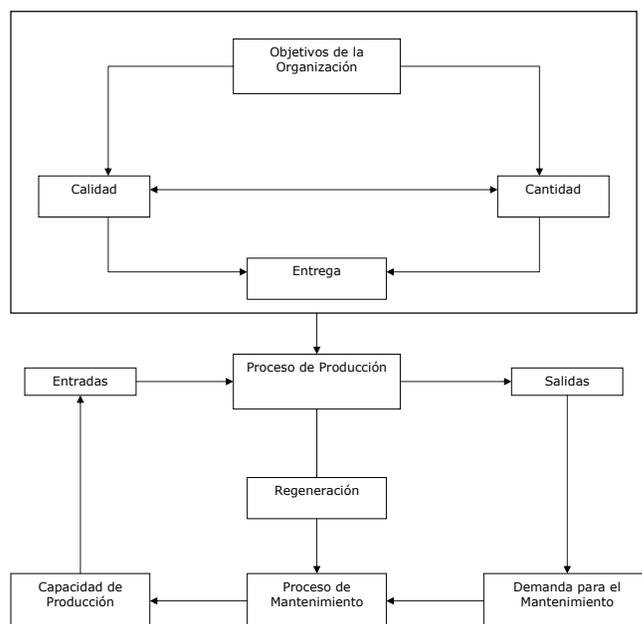


Figura 4.5: Relación entre los objetivos de la organización, los procesos de producción y el mantenimiento.

- La frecuencia de fallas prematuras pueden ser reducidas por medio de, entre otras tareas, una apropiada lubricación, ajuste, limpieza e inspecciones.
- Si la falla no puede ser prevenida, la inspección periódica y el proceso de medición pueden ayudar a reducir la severidad de la misma y su posible influencia en los demás componentes del sistema y, en consecuencia, mitigar las consecuencias negativas producidas al ambiente o a la producción.
- Cuando se tiene la facilidad de monitorear la degradación o desgaste natural de una función o parámetro como la calidad del producto o la vibración de la máquina, se puede detectar una “impending failure”.
- Una interrupción no planeada frecuentemente daña en gran medida los planes de producción y de salida, debido a que el costo de un paro de emergencia es mayor que el de uno planeado, y la calidad de la reparación puede verse alterada.

El mantenimiento puede ser basado en condición o en los datos históricos de las fallas del equipo. Con base en la Figura 4.6, se tienen dos categorías para el mantenimiento preventivo, una es basada en estadísticas o registros históricos y confiabilidad y otra es basada en la condición del equipo.

Mantenimiento basado en condición

Como su nombre lo indica, el mantenimiento preventivo basado en condición es llevado a cabo con base en la condición o estado actual del equipo. Esta condición del equipo es determinada mediante un monitoreo o medición de parámetros clave que indican un deterioro o

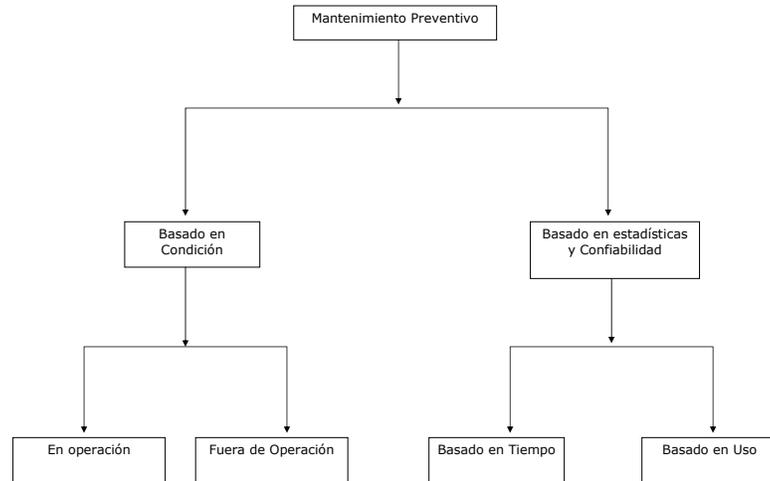


Figura 4.6: Categorías del mantenimiento preventivo.

degradación en el equipo. Las mediciones e inspecciones en sí, pueden ser desarrolladas de una manera regular, no así las acciones de reparación o de prevención. Estas mediciones pueden estar relacionadas directamente a las operaciones de la máquina, tales como vibración, temperatura de operación, estado de los lubricantes o niveles de ruido, o pueden estar ligadas a mediciones de aspectos de la misma máquina tales como la calidad del producto, sus dimensiones, patrones de uso y composición. Esta estrategia de mantenimiento también es conocida como mantenimiento predictivo.

4.6.2. Mantenimiento, sistemas reparables y riesgos en competencia

La relación entre el mantenimiento hecho a sistemas reparables y el estudio de los sistemas reparables en sí, puede verse como una situación de riesgos en competencia. Suponga que el evento de interés es el paro del equipo, pues al dejar de desarrollar las actividades para las que fue diseñado, puede provocar, por ejemplo, el paro de otros equipos que dependen de su funcionamiento y consecuentemente un retraso en el proceso de producción. Suponga que el equipo interrumpe su actividad por dos razones (causas): una debido a reparación y otra por la acción de mantenimiento preventivo.

Sean T_1 y T_2 las variables aleatorias que modelan el tiempo de falla y de mantenimiento (programado o no), respectivamente, para un sistema reparable. De lo anterior, los datos registrados para los tiempos de paro son del tipo de datos de riesgos en competencia: (T, C) , donde $T = \min\{T_1, T_2\}$ es el tiempo de paro de equipo y C es la causa de paro (reparación o mantenimiento).

Bajo estas circunstancias, es de interés estudiar la calidad del monitoreo en el mantenimiento predictivo o, en general, la calidad del mantenimiento preventivo. Lo anterior es en el siguiente sentido: si se tiene un buen mantenimiento preventivo, entonces los paros del equipo debido a mantenimiento se deberían realizar cerca de los tiempos hipotéticos en los que se hubiera presentado la falla. Cuando la falla se presenta primero, entonces se tiene que $T_1 < T_2$

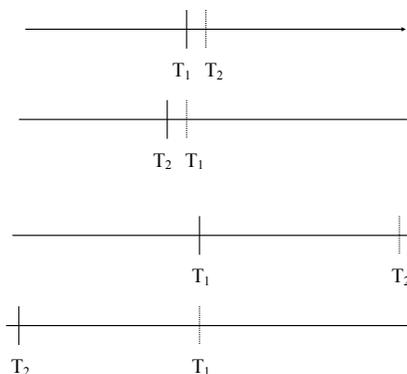


Figura 4.7: Diagramas que ilustran un buen y un mal programa de mantenimiento, donde la línea continua representa el tiempo del evento observado y la línea discontinua el tiempo hipotético al cual el evento no observado se hubiera presentado.

pero la diferencia $T_2 - T_1$ no debería ser muy grande, es decir, el tiempo al cual se hubiera aplicado mantenimiento al equipo (T_2) debería ser cercano a T_1 . Por el contrario, si el mantenimiento no es muy adecuado, entonces puede suceder que los paros por mantenimiento se realicen mucho antes de que la falla se hubiera presentado, provocando un “paro innecesario”, pues el equipo hubiera podido seguir trabajando correctamente por otro periodo más de tiempo. Generalmente, los costos por reparación son mayores que los costos por mantenimiento preventivo. Lo ideal sería realizar solamente acciones de mantenimiento y no de reparación, pero eso no es posible debido a la aleatoridad del proceso de fallas, de ahí que sería deseable una igualdad entre las distribuciones marginales de T_1 y T_2 . En la Figura 4.7 se muestran diagramas que corresponderían a un buen plan de mantenimiento donde los tiempos T_1 y T_2 no están demasiado separados y donde los tiempos T_1 y T_2 están relativamente separados, lo que correspondería a un mal plan de mantenimiento o, en su caso, a un mal monitoreo del equipo.

4.7. Modelos de riesgos en competencia

En esta sección se presentan modelos para datos de riesgos en competencia. Algunos útiles para el enfoque bivariado y otros para el de tiempos latentes.

4.7.1. Recortes aleatorios (Random clipping)

En algunos casos, cuando se estudia la confiabilidad o estado de un sistema, no es posible contar o registrar tiempos de falla, ya que la presencia de una falla puede ser extremadamente costosa en términos económicos o puede traer graves consecuencias. Por ejemplo, al considerar un avión, una falla que se presente durante su funcionamiento podría provocar la muerte de los pasajeros.

En situaciones como la descrita, un modelo que se puede considerar es el de recortes aleatorios [3], el cual posiblemente es el modelo de interacción más sencillo entre un proceso de vida exponencial (o de fallas) X y un proceso de alerta (o de censura) Z . En este modelo se asume que X es siempre censurado por una cantidad aleatoria $X - Z$, es decir, solo se registran tiempos de censura. Más específicamente, se asume que X es exponencial y que para alguna

variable aleatoria no negativa W independiente de X , se observa $X - W$. W se puede pensar como una alerta que el componente emite antes de fallar al tiempo X . Claro está que W puede ser mayor que X , sin embargo, se supondrá que este tipo de censuras no son registradas.

Se denominará a la variable $X - W$ dado $X - W > 0$ un recorte aleatorio de X . El siguiente resultado muestra que, en este caso,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sum_{i=1}^n z_i},$$

donde $\lambda > 0$ es el parámetro de la distribución exponencial de X y los z_i son los tiempos de censura. En otras palabras, con los datos de censura, y bajo ciertas condiciones, se puede hacer inferencia sobre la distribución de los tiempos de falla.

Teorema 4.7.1 *Sea $X \sim \text{EXP}(\lambda)$ y $W > 0$ variable aleatoria independiente de X con $U = X - W$. Entonces, condicionado a $U > 0$, U tiene la misma distribución que X .*

Demostración. Para $u \in (-\infty, \infty)$ se tiene que

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U > u) \\ &= P(X + W > u) \\ &= \int_0^\infty P(X + W > u \mid W = w) dF_W(w) \\ &= \int_0^\infty P(X > u + w \mid W = w) dF_W(w) \\ &= \int_0^\infty P(X > u + w) dF_W(w), \text{ por independencia entre } X \text{ y } W \\ &= \int_0^\infty \exp[-(u + w)\lambda] dF_W(w), \text{ pues } X \sim \text{EXP}(\lambda). \end{aligned}$$

Por otro lado, condicionado a $U > 0$, la probabilidad de que $U > u$ es

$$\begin{aligned} 1 - F_{U \mid U > 0}(u) &= P(U > u \mid U > 0) \\ &= \frac{P(U > u, U > 0)}{P(U > 0)} \\ &= \frac{P(U > \max\{0, u\})}{P(U > 0)}. \end{aligned}$$

Si $\max\{0, u\} = 0$, entonces $P(U > u \mid U > 0) = 1$, de otra manera, es decir, si $\max\{0, u\} = u$ se obtiene

$$\begin{aligned} P(U > u \mid U > 0) &= \frac{P(U > u)}{P(U > 0)} \\ &= \frac{F_U(u)}{F_U(0)} \\ &= \frac{\int_0^\infty \exp[-(u + w)\lambda] dF_W(w)}{\int_0^\infty \exp(-w\lambda) dF_W(w)} \\ &= \exp(-u\lambda) \frac{\int_0^\infty \exp(-w\lambda) dF_W(w)}{\int_0^\infty \exp(-w\lambda) dF_W(w)} \\ &= \exp(-u\lambda), \text{ si } \int_0^\infty \exp(-w\lambda) dF_W(w) < \infty. \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.7.2. Signos aleatorios

Este modelo usa la idea de que el tiempo al cual el mantenimiento preventivo ocurre está relacionado con el tiempo de falla [8]. El tiempo T_2 (tiempo de censura) al cual se aplica mantenimiento, es igual al tiempo de falla T_1 menos una cantidad aleatoria ϵ , esto es, $T_2 = T_1 - \epsilon$. Por otro lado, mientras ϵ puede no ser independiente de T_1 , su signo sí lo es. En otras palabras, el mantenimiento preventivo pretende ser efectivo y ocurrir alrededor del tiempo de falla, ya sea antes o después de esta, pero no lejos. Para este modelo se asume que cuando una variable es censurada es independiente de su edad, pero *dado* que es censurada, el tiempo de censura depende de su edad. Este tipo de relación entre los tiempos de edad y censura son aplicables en muchos casos. Por ejemplo, suponga que cierto equipo muestra síntomas antes de presentar una falla. Si estos síntomas son observados por el personal, el componente será puesto fuera de servicio y reparado, por lo tanto censurado. Sin embargo, el proceso de observación puede ser descrito por una variable aleatoria la cual es independiente de la edad del componente.

Para este modelo, la variable ϵ se puede interpretar como la calidad del monitoreo o del mantenimiento en sí: para $|\epsilon|$ pequeño se tiene buena calidad del mantenimiento, de lo contrario, para $|\epsilon|$ grande la calidad no es tan buena. El siguiente resultado caracteriza el modelo de signos aleatorios con cantidades que se pueden estimar de los datos de riesgos en competencia (funciones de sub confiabilidad).

Teorema 4.7.2 (Signos aleatorios) Sean $\{S_1^*, S_2^*\}$ un par de funciones de sub confiabilidad estrictamente decrecientes, entonces son equivalentes

1. Existen variables aleatorias ϵ y X con $\text{sgn}(\epsilon)$ independiente de X tales que

$$\begin{aligned} S_1^*(t) &= P(X > t, \epsilon < 0) \\ S_2^*(t) &= P(X - \epsilon > t, \epsilon > 0) \end{aligned}$$

2. Para todo $t > 0$,

$$\frac{S_1^*(t)}{S_1^*(0)} > \frac{S_2^*(t)}{S_2^*(0)}$$

El resultado anterior nos dice que si, con base en los datos, las sub confiabilidades escaladas, esto es, divididas por $S_1^*(0)$ y $S_2^*(0)$ que son las probabilidades de falla y censura, presentan la relación de orden establecida en 2 del Teorema 4.7.2, entonces el modelo de signos aleatorios es adecuado. Una característica de este modelo es que la probabilidad condicional de censura es máxima en el origen [3], es decir, para $t > 0$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\equiv P(T > t, C = 2 | T > t) \\ &= \frac{\bar{F}_{T,C}(t, 2)}{\bar{F}_{T,C}(t, 1) + \bar{F}_{T,C}(t, 2)} \\ &= \frac{\bar{F}_{T,C}(t, 2)}{\bar{F}_T(t)} \\ &< \Phi(0). \end{aligned}$$

Otra característica importante e interesante de este modelo es que la confiabilidad de los tiempos entre falla es identificable, o se puede estimar de los datos con los que se cuenta, esto

es

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{T_1}(t) &= P(T_1 > t) \\
&= P(T_1 > t \mid \epsilon < 0) \text{ por independencia entre } \text{sgn}(\epsilon) \text{ y } T_1 \\
&= \frac{P(T_1 > t, \epsilon < 0)}{P(\epsilon < 0)} \\
&= \frac{P(T_1 > t, T_1 < T_2)}{P(T_1 < T_2)} \\
&= \frac{P(T > t, C = 1)}{P(C = 1)}, \quad T = \min\{T_1, T_2\} \\
&= \frac{\bar{F}_{T,C}(t, 1)}{\bar{F}_{T,C}(0, 1)}.
\end{aligned}$$

4.7.3. Copula graphic estimator

En el contexto de riesgos en competencia, estimar la distribución marginal del tiempo T_1 al cual ocurre un evento de interés es un problema común en aplicaciones de medicina y de ingeniería. En estas aplicaciones, T_1 puede ser el tiempo de falla de un componente o de un equipo, tiempo de ocurrencia de una enfermedad en particular, o simplemente el tiempo de muerte. Frecuentemente no es posible registrar o medir T_1 debido a otro evento observado (riesgo en competencia) en algún tiempo T_2 . Es común que para estimar la distribución marginal de interés, se hace el supuesto de independencia entre T_1 y T_2 , de modo que con los datos de riesgos en competencia registrados se pueden estimar ambas distribuciones de una única manera, sin el problema de identificabilidad presentado en la sección 3.4.

Como se ha mencionado, la hipótesis de independencia difícilmente es cierta y, más aun, no es posible verificarla con base en el tipo de datos con los que se cuenta. Por ejemplo, en el contexto de confiabilidad, es natural pensar que el tiempo de mantenimiento de un equipo depende del tiempo de falla de éste. De modo que es necesario tener información de la dependencia entre T_1 y T_2 . De la sección 3.3 se sabe que una función que captura la dependencia entre dos variables aleatorias es la cópula, la cual contiene toda la información que acopla las dos distribuciones marginales para producir la distribución conjunta de (T_1, T_2) .

De los datos de riesgos en competencia se pueden estimar las siguientes cantidades

$$F_{\mathbf{T}}(t, t) = P(T_1 > t, T_2 > t), \quad F_{T,C}(t, 1) = P(T \leq t, C = 1) \text{ y } F_{T,C}(t, 2) = P(T \leq t, C = 2).$$

En el siguiente resultado se afirma que si la cópula C_α de (T_1, T_2) es conocida, entonces las distribuciones marginales de T_1 y T_2 están determinadas únicamente por los datos de riesgos en competencia [32].

Teorema 4.7.3 *Suponga que las funciones de distribución marginales del vector (T_1, T_2) son continuas y estrictamente crecientes en $(0, \infty)$. Suponga que la cópula, C_α , de (T_1, T_2) , es conocida y completamente especificada con $\mu_C(E) > 0$ para cualquier conjunto abierto $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$. Entonces las distribuciones marginales de T_1 y T_2 , F_{T_1} y F_{T_2} , están únicamente determinadas por $\{F_{\mathbf{T}}(t, t), F_{T,C}(t, 1), F_{T,C}(t, 2), t > 0\}$.*

En el teorema anterior, $\mu_C(\cdot)$ denota la medida de probabilidad correspondiente a la cópula C_α . Lo que procede es exhibir el algoritmo propuesto en [32] para estimar las distribuciones marginales, dados los datos y la cópula. De aquí en adelante, se referirá a dicho algoritmo como el Copula graphic estimator (siguiendo a sus autores). Se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu_C(A_t) &= P(T_1 > t, T_2 > t) = F_{\mathbf{T}}(t, t), \\
\mu_C(B_t) &= P(T \leq t, C = 1) = F_{T,C}(t, 1),
\end{aligned}$$

donde

$$A_t = \{(u, v) \mid F_{T_1}(t) < u \leq 1, F_{T_2}(t) < v < 1\},$$

$$B_t = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq F_{T_1}(t), F_{T_2}(F_{T_1}^{-1}(u)) \leq v \leq 1\}.$$

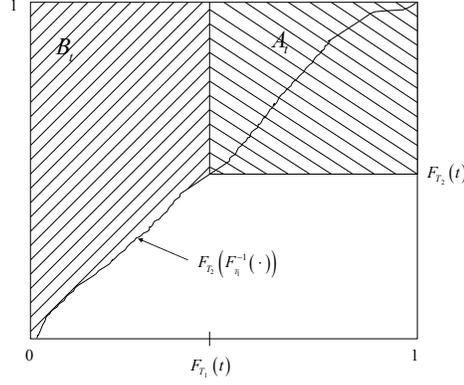


Figura 4.8: Relación entre $F_{T_1}(t)$ y $F_{T_2}(t)$ en el cuadrado unitario.

Una elección natural de los puntos en los que se desean estimar las distribuciones son los distintos tiempos registrados t_1, t_2, \dots, t_n . Con esto en mente y asumiendo valores constantes para las marginales en los intervalos (t_{i-1}, t_i) , la estimación se puede realizar como sigue.

Si $c_i = 1$ entonces $\widehat{F}_{T_2}(t_i) = \widehat{F}_{T_2}(t_{i-1})$, mientras que si $c_i = 2$ entonces $\widehat{F}_{T_1}(t_i) = \widehat{F}_{T_1}(t_{i-1})$, haciendo $t_0 \equiv 0$ y asumiendo $\widehat{F}_{T_1}(t_0) = \widehat{F}_{T_2}(t_0) = 0$.

Así, para $c_i = 1$,

$$\mu_C(\widehat{A}_{t_i}) = 1 - \widehat{F}_{T_1}(t_i) - \widehat{F}_{T_2}(t_{i-1}) + C_\alpha[\widehat{F}_{T_1}(t_i), \widehat{F}_{T_2}(t_{i-1})] = \widehat{F}_T(t_i, t_i); \quad (4.26)$$

y para $c_i = 2$,

$$\mu_C(\widehat{A}_{t_i}) = 1 - \widehat{F}_{T_1}(t_{i-1}) - \widehat{F}_{T_2}(t_i) + C_\alpha[\widehat{F}_{T_2}(t_{i-1}), \widehat{F}_{T_2}(t_i)] = \widehat{F}_T(t_i, t_i). \quad (4.27)$$

Entonces $\widehat{F}_{T_1}(t_i)$ y $\widehat{F}_{T_2}(t_i)$ son encontradas resolviendo (4.26) o (4.27), según sea el caso.

Una propiedad importante que tienen los estimadores que proporciona el método es que son consistentes fuertes, como lo sostiene el siguiente resultado [32].

Teorema 4.7.4 *Suponga que las dos distribuciones marginales F_{T_1} , F_{T_2} son continuas, estrictamente crecientes en $(0, \infty)$ y que la cópula asumida tiene función de densidad $c_\alpha(u, v) > 0$ en $[0, 1] \times [0, 1]$. Entonces $(\widehat{F}_{T_1})_n(t)$ y $(\widehat{F}_{T_2})_n(t)$ son consistentes fuertes. Esto es, con probabilidad 1, conforme $n \rightarrow \infty$, $(\widehat{F}_{T_1})_n(t) \rightarrow F_{T_1}(t)$ y $(\widehat{F}_{T_2})_n(t) \rightarrow F_{T_2}(t)$ para toda $t \in [0, \infty]$.*

4.7.4. Mezcla de exponenciales

Sea $S_X(t)$ la confiabilidad del tiempo de falla una mezcla de dos exponenciales con parámetros $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y el coeficiente de mezcla p . Sea $S_Y(t)$ la confiabilidad de la censura una exponencial con parámetro λ_y . Con base en lo anterior, se tiene que

$$S_X(t) = p \exp(-\lambda_1 t) + (1 - p) \exp(-\lambda_2 t)$$

$$S_Y(t) = \exp(-\lambda_y t).$$

Si X es independiente de Y , entonces, siguiendo [6], se puede demostrar que

1.

$$S_X^*(t) = p \frac{\lambda_1}{\lambda_y + \lambda_1} \exp[-(\lambda_y + \lambda_1)t] + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_y + \lambda_2} \exp[-(\lambda_y + \lambda_2)t]$$

2.

$$S_Y^*(t) = p \frac{\lambda_y}{\lambda_y + \lambda_1} \exp[-(\lambda_y + \lambda_1)t] + (1-p) \frac{\lambda_y}{\lambda_y + \lambda_2} \exp[-(\lambda_y + \lambda_2)t]$$

3.

$$\frac{S_X^*(t)}{S_X^*(0)} = \frac{\exp[-(\lambda_y + \lambda_1)t] + \frac{1-p}{p} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\lambda_y + \lambda_1}{\lambda_y + \lambda_1} \exp[-(\lambda_y + \lambda_2)t]}{1 + \frac{1-p}{p} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\lambda_y + \lambda_1}{\lambda_y + \lambda_1}}$$

4.

$$\frac{S_Y^*(t)}{S_Y^*(0)} = \frac{\exp[-(\lambda_y + \lambda_1)t] + \frac{1-p}{p} \frac{\lambda_y + \lambda_1}{\lambda_y + \lambda_1} \exp[-(\lambda_y + \lambda_2)t]}{1 + \frac{1-p}{p} \frac{\lambda_y + \lambda_1}{\lambda_y + \lambda_1}}$$

5.

$$\frac{S_X^*(t)}{S_X^*(0)} \leq \frac{S_Y^*(t)}{S_Y^*(0)}, \Phi(t) \text{ es mínimo en el origen y continuamente creciente.}$$

Capítulo 5

Aplicación

En el presente capítulo se ilustra una forma de hacer inferencia con datos de riesgos en competencia, así como las posibles preguntas que se pueden contestar. Los datos son tiempos entre paros de una bomba centrífuga de agua de lavado. La forma de obtener los datos de riesgos en competencia fue la siguiente: del equipo en cuestión, se nos proporcionó un registro de las acciones realizadas al mismo, ya sea alguna reparación o mantenimiento preventivo, así como las fechas de inicio y término de las mismas. Se tomaron como tiempos entre paro los días de diferencia entre las fechas de fin e inicio de las acciones y como causa la naturaleza de la acción (reparación o mantenimiento preventivo). No se consideraron los tiempos de duración del mantenimiento o reparación porque no son útiles para nuestros objetivos. En la sección 5.1 se presenta una breve descripción del equipo. La inferencia para la función de intensidad del proceso puntual para los tiempos entre falla se presenta en la sección 5.2. Considerando los dos enfoques, en la sección 5.3 se hace inferencia sobre algunos modelos para datos de riesgos en competencia y por último, en la sección 5.4 se presentan algunas conclusiones obtenidas de este trabajo y recomendaciones para estudios posteriores del mismo.

5.1. Descripción del equipo

Siempre que se abordan temas en los que existe circulación de fluidos, por ejemplo procesos químicos, estamos, de alguna manera, entrando en el tema de bombas. Una bomba es una máquina hidráulica que transforma la energía (generalmente energía mecánica) con la que es accionada en energía hidráulica del fluido incompresible que mueve. El fluido incompresible puede ser líquido o una mezcla de líquidos y sólidos como puede ser el hormigón antes de fraguar (forjar) o la pasta de papel. Al incrementar la energía del fluido, se aumenta su presión, su velocidad o su altura, todas ellas relacionadas según el principio de Bernoulli¹. En general, una bomba se utiliza para incrementar la presión de un líquido, añadiendo energía al sistema hidráulico para mover el fluido de una zona de menor presión o altitud a otra de mayor presión o altitud.

Existen varios tipos de bombas para diferentes aplicaciones. Algunos factores que permiten escoger un sistema de bombeo adecuado son: presión última, presión de proceso, velocidad de bombeo, tipo de gases a bombear (la eficiencia de cada bomba varía según el tipo de gas). En la Figura 5.1 se presenta una clasificación de bombas según el tipo de funcionamiento y tipo de accionamiento.

En particular, las bombas centrífugas son las más usadas en las industrias. Se utilizan para desplazar líquidos a través de un sistema de tuberías, accionadas principalmente por motores

¹El principio de Bernoulli, también denominado ecuación de Bernoulli o Trinomio de Bernoulli, describe el comportamiento de un fluido moviéndose a lo largo de una línea de corriente.

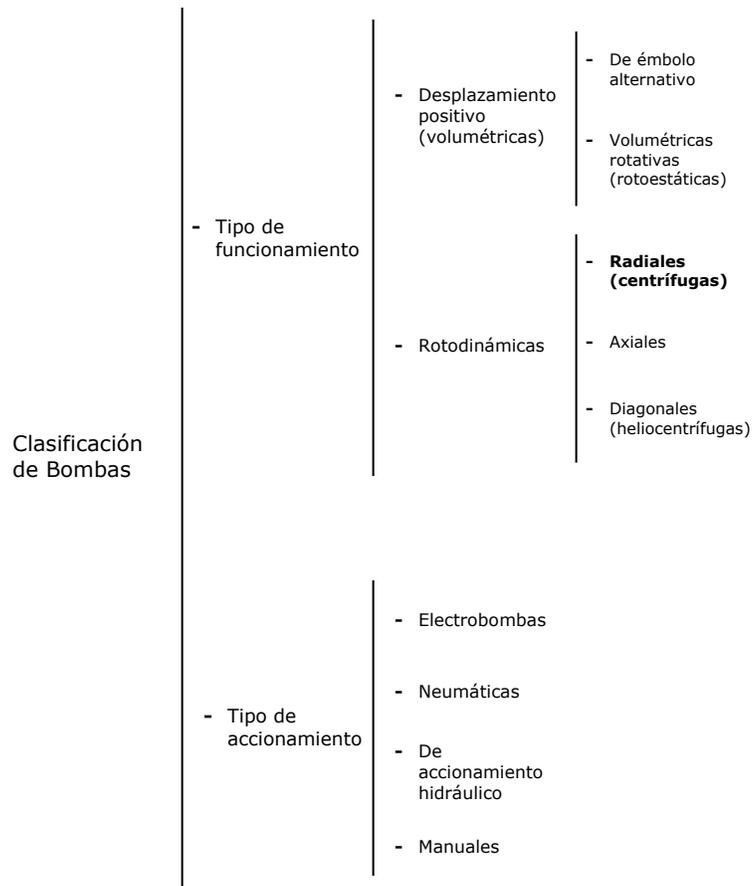


Figura 5.1: Clasificación de bombas con base en su funcionamiento y tipo de accionamiento.

eléctricos y de combustión interna. Estas bombas crean un flujo utilizando la energía cinética² de un rodete giratorio para generar el movimiento del fluido. La eficacia de una bomba centrífuga depende del rendimiento de este rodete.

En este caso en particular, los datos provienen de una bomba de agua centrífuga que se utiliza en el lavado de algunos productos corrosivos derivados del proceso en que se manejan gases ácidos, como el ácido sulfhídrico, y que se realizan en la planta hidrodesulfuradora de destilados intermedios (Diesel) de una refinería.

²Energía que surge en el fenómeno del movimiento, definida como el trabajo necesario para acelerar un cuerpo de una masa dada desde su posición de equilibrio hasta una velocidad dada.



Figura 5.2: Ejemplo de dos bombas centrífugas.

5.2. Inferencia para la función de intensidad

El tamaño de muestra de los datos para hacer la inferencia es de 35 paros, de los cuales 29 fueron por reparación y solamente 6 por mantenimiento preventivo (Tabla 5.1). En seguida se presentan algunas gráficas descriptivas de estos y se observa que los tiempos entre falla en general son mayores que los de mantenimiento.

246	1	14	1	30	1	48	1	7	1	3	1	2	1	7	1
6	1	11	1	7	1	8	1	24	1	21	1	5	1	1	1
7	1	3	1	92	1	13	1	10	1	4	1	10	1	49	1
89	1	48	2	12	2	8	2	3	2	3	1	3	2	3	2
28	1	23	1	22	1										

Tabla 5.1: Datos de riesgos en competencia para una bomba centrífuga (t_i, c_i) . La causa 1 corresponde a paro por reparación y la causa 2 a paro por mantenimiento preventivo.

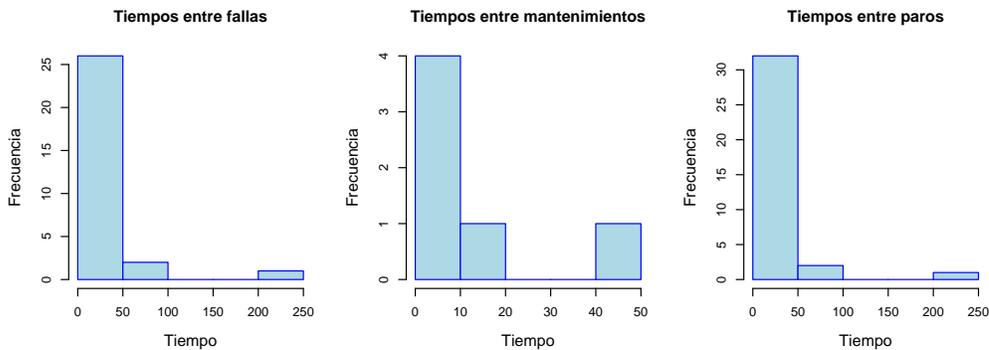


Figura 5.3: Histogramas de los tiempos entre fallas, entre mantenimientos y entre paros del equipo.

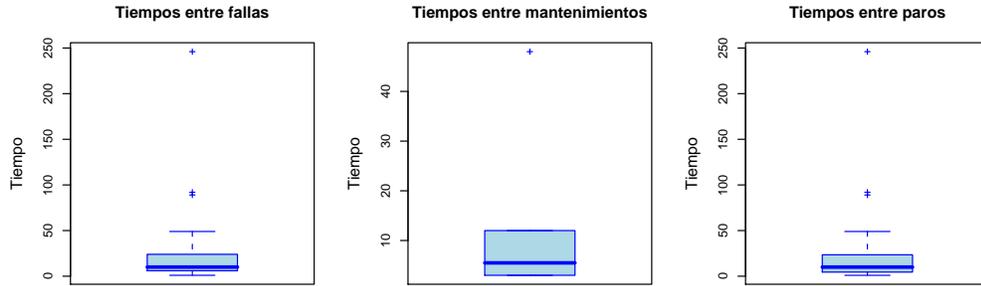


Figura 5.4: Gráficas de caja de los tiempos entre fallas, mantenimientos y entre paros del equipo.

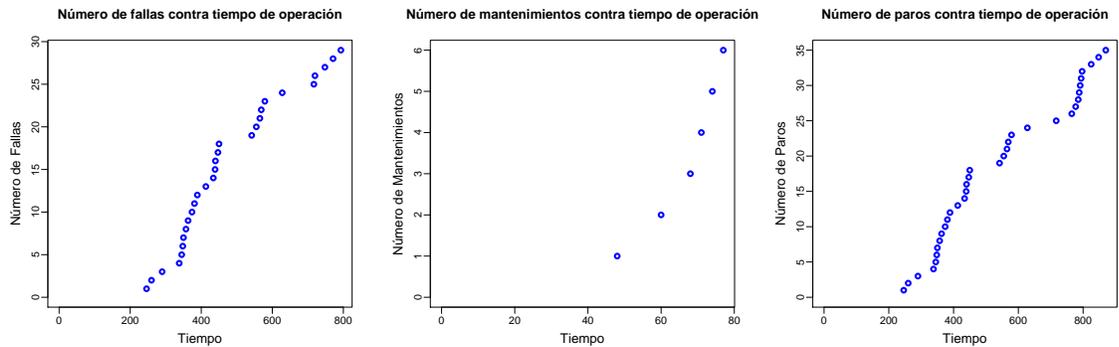


Figura 5.5: Gráficas del número de fallas, mantenimientos y paros del equipo contra tiempo de operación.

Para una mejor comprensión de la forma en que se construyeron las gráficas de la Figura 5.5, se presentan las tres primeras coordenadas cartesianas que se graficaron para obtener la correspondiente al número de fallas contra tiempos de operación

$$(246, 1), (246 + 14, 2) = (260, 2), (246 + 14 + 30, 3) = (290, 3),$$

que no son mas que parejas donde la primera entrada es el tiempo global de falla (Definición 4.1.1) y la segunda es el número de fallas acumuladas hasta dicho tiempo.

De la Figura 5.5 se observa que a partir de un tiempo alrededor de 200 se tiene un comportamiento razonablemente lineal del número de fallas contra el tiempo de operación, lo que indica que el equipo pudiera tener una tasa de fallas razonablemente constante. Como modelos para la función de intensidad y suponiendo un proceso de Poisson para los tiempos de falla, se utilizarán los propuestos en (4.8) y (4.13), probándose las hipótesis relevantes en cada caso. Para este análisis se trabajará solamente con los tiempos entre falla.

5.2.1. Función de intensidad log lineal

De (4.8) se tiene que tal función está dada por

$$\lambda(t) = \exp(\beta_0 + \beta_1 t), \quad \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Se hará estimación máximo verosímil de los parámetros. Para mejorar la convergencia del método de optimización, se reescalan los tiempos dividiéndolos entre el mayor. Hecho lo anterior se obtiene:

$$\hat{\beta}_0 \approx 2.672209, \quad \hat{\beta}_1 \approx 1.259653.$$

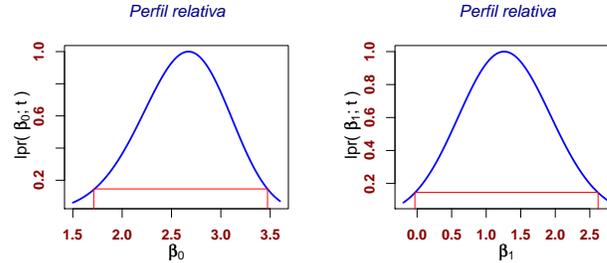


Figura 5.6: Verosimilitudes perfiles relativas para los parámetros de la función de intensidad log lineal así como intervalos aproximados de verosimilitud confianza de 95 %.

De la Figura (5.6) se observa que el valor de 0, aunque poco, es plausible para β_1 , lo que implicaría una función de intensidad constante. Se procede a probar la hipótesis $H : \beta_1 = 0$, para lo que se utilizarán los estadísticos de razón de verosimilitudes y de Laplace presentadas en la sección 4.5, ambas pruebas llevadas a cabo a un nivel de significancia de 0.05.

Prueba de razón de verosimilitudes

Recordando que, con base en los tiempos entre falla \mathbf{t} , el estadístico de prueba es

$$D = -2 \log \left[\frac{\sup_{\beta_0 \in \mathbb{R}} L(\beta_0, 0; \mathbf{t})}{L(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1; \mathbf{t})} \right],$$

y haciendo los cálculos correspondientes se obtiene

$$D_0 = 2 \left[n \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n t_i - n \log \left(\frac{n}{t_0} \right) \right] \\ \approx 3.688598.$$

El p -valor de la prueba es $P(D > D_0) \approx 0.05478565$, donde D tiene una distribución aproximada ji cuadrada con un grado de libertad. Así, no se rechaza la hipótesis.

Prueba de Laplace

El estadístico de prueba es

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} t_i - \frac{(n-1)t_n}{2}}{t_n \sqrt{\frac{n-1}{12}}},$$

el cual bajo H sigue una distribución aproximada normal estándar. El valor del estadístico de prueba es $U_0 = 1.614757$. Estableciendo como hipótesis alternativa $H_1 : \beta_1 > 0$, el p -valor de la prueba es $P(U > U_0) \approx 0.05318163$, de modo que no se rechaza la hipótesis.

Los resultados de las pruebas anteriores no implican un rechazo de la hipótesis nula, sin embargo, los p -valores (que son similares) muestran que la evidencia de los datos a favor de H_0 es débil.

5.2.2. Función de intensidad potencia (Weibull)

Con base en (4.13), la función de intensidad de potencia está dada por

$$\lambda(t) = \gamma\delta t^{\delta-1}, \quad \gamma > 0, \delta > 0, t \geq 0.$$

Procediendo de la misma manera que en el caso anterior, los tiempos se escalaron para obtener estimadores cerrados de máxima verosimilitud para los parámetros, las cuales están dados por

$$\begin{aligned} \hat{\delta} &= -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(t_i)} \approx 1.789032, \\ \hat{\gamma} &= n = 29. \end{aligned}$$

Con base en la estimación puntual de δ , se pudiera esperar rechazar las hipótesis $H_0 : \delta = 1$ a favor de $H_1 : \delta > 1$. Una prueba formal para lo anterior es la siguiente.

Prueba MIL-HDBK 189

El estadístico de prueba es

$$V = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \log\left(\frac{t_n}{t_i}\right),$$

el cual, bajo H_0 , sigue una distribución ji cuadrada con $2(n-1)$ grados de libertad. Haciendo los cálculos, el valor del estadístico es $V_0 \approx 32.41977$. Ya que, como se comentó, valores pequeños de V están relacionados con valores grandes de $\hat{\delta}$, se tiene que el p -valor de la prueba es $P(V \leq V_0) \approx 0.004861697$, donde V sigue una distribución ji cuadrada con 56 grados de libertad. Así, con un nivel de significancia de 0.05, se rechaza H_0 a favor de H_1 , es decir, los datos muestran evidencia a favor de una función de intensidad no constante.

Los resultados obtenidos de las pruebas anteriores para las dos funciones de intensidad sugieren una función de intensidad no constante para los tiempos entre fallas. De la Figura 5.5, se observa que el primer tiempo de falla registrado es considerablemente mayor que el resto de los que se presentaron, lo que puede poner en tela de juicio su autenticidad como tiempo de falla. Lo anterior se puede justificar de la siguiente manera. En varias empresas suele ocurrir que cuando se adquiere un nuevo equipo, éste no comienza a operar de inmediato, sino que es llevado a almacén o inventario y, después de un tiempo determinado, es puesto en operación. En estas circunstancias, generalmente se tiene registrada con exactitud la fecha de adquisición del equipo pero, y de aquí surge el problema, no se tiene registrada con precisión la fecha en la cual el equipo empieza a trabajar, lo que implica que el primer tiempo de falla registrado puede no ser el tiempo de falla desde que empezó a funcionar, sino el tiempo que transcurrió desde que se adquirió hasta que se presenta la primera falla.

Así, con base en lo anterior, se realizó el mismo proceso de inferencia para las funciones de intensidad propuestas sin considerar el tiempo 246. Los resultados se resumen a continuación.

En la Figura 5.9 se observa un comportamiento razonablemente lineal del número de fallas contra el tiempo de operación, pero a diferencia del de la Figura 5.5, éste comienza en valores cercanos a cero.

- Función de intensidad log lineal

Estimaciones máximo verosímiles: $\hat{\beta}_0 \approx 3.6262377$, $\hat{\beta}_1 \approx -0.2031939$. Se probará la siguiente hipótesis $H : \beta_1 = 0$.

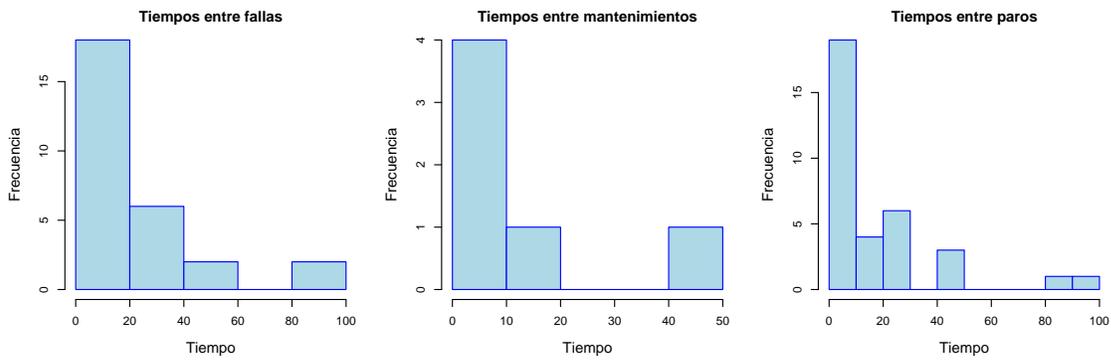


Figura 5.7: Histogramas de los tiempos entre fallas, mantenimientos y entre paros del equipo sin el tiempo 246.

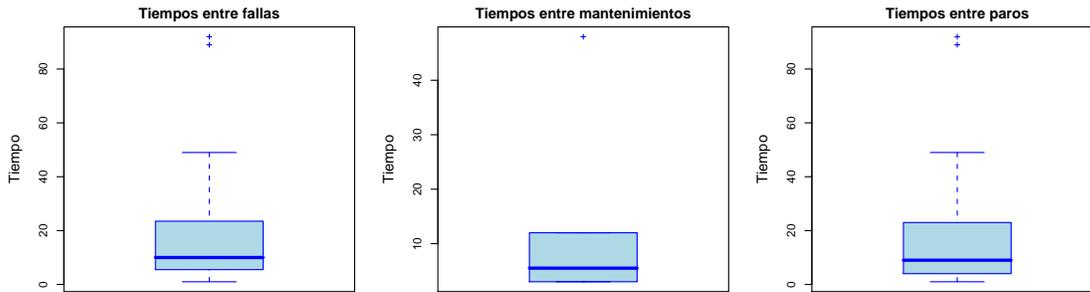


Figura 5.8: Gráficas de caja de los tiempos entre fallas, mantenimientos y entre paros del equipo sin el tiempo 246.

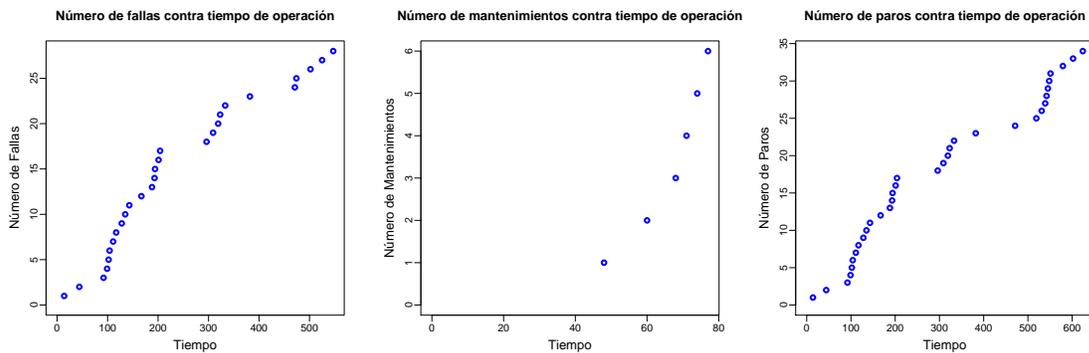


Figura 5.9: Gráficas del número de fallas, mantenimientos y paros del equipo contra tiempo de operación sin el tiempo 246.

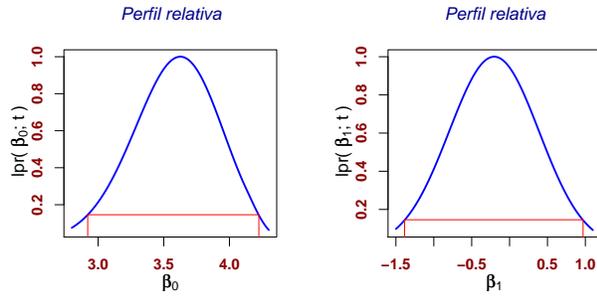


Figura 5.10: Verosimilitudes perfiles relativas para los parámetros de la función de intensidad log lineal así como intervalos aproximados de verosimilitud confianza de 95 % sin el tiempo 246.

Prueba de razón de verosimilitudes

- Valor del estadístico de prueba: $D_0 \approx 0.1168656$.
- p -valor: $P(D > D_0) \approx 0.7324592$.

Prueba de Laplace

- Valor del estadístico de prueba: $U_0 \approx -0.6484427$.
- p -valor: $2P(U > |U_0|) \approx 0.5166987$ (considerando la alternativa $H_1 : \beta_1 \neq 0$).

■ Función de intensidad Weibull

Estimaciones máximo verosímiles: $\hat{\delta} \approx 0.993623$, $\hat{\gamma} = 34$. Se hará una prueba para las siguientes hipótesis $H_0 : \delta = 1$ vs $H_1 : \delta \neq 1$.

Prueba MIL-HDBK 189.

- Valor del estadístico de prueba: $V_0 = 68.43642$.
- p -valor: $2P(V > V_0) \approx 0.7891609$.

Así, los datos muestran evidencia a favor de una intensidad constate, lo que implicaría un PPH o más aun, un proceso de renovación para los tiempos de falla, lo cual es muy importante ya que sería razonable suponer independencia e igualdad de distribución para éstos. De aquí en adelante, el análisis se llevará a cabo sin considerar el tiempo de falla 246.

A manera de resumen, en la Tabla 5.2 se muestran las estimaciones de las funciones de intensidad obtenidas bajo los modelos log lineal y Weibull.

Log lineal	Weibull
$\hat{\lambda}(t) \approx 37.5712$	$\hat{\lambda}(t) = 34$

Tabla 5.2: Estimaciones de las funciones de intensidad obtenidas bajo los modelos log lineal y Weibull sin el tiempo 246.

5.3. Inferencia para modelos de riesgos en competencia

Se hará inferencia utilizando algunos modelos para datos de riesgos en competencia. En principio, se utilizará el enfoque bivariado (T, C) y después el de tiempos latentes.

5.3.1. Enfoque bivariado

Antes de proponer modelos para este enfoque, se investigará el comportamiento de los datos en forma marginal. Debido a que, generalmente, las distribuciones de probabilidad utilizadas para modelar los tiempos de falla son Weibull, lognormal o loglogística, en las Figuras 5.11 y 5.12 se presentan los papeles de probabilidad para los tiempos entre falla y mantenimiento correspondientes a cada una de éstas distribuciones.

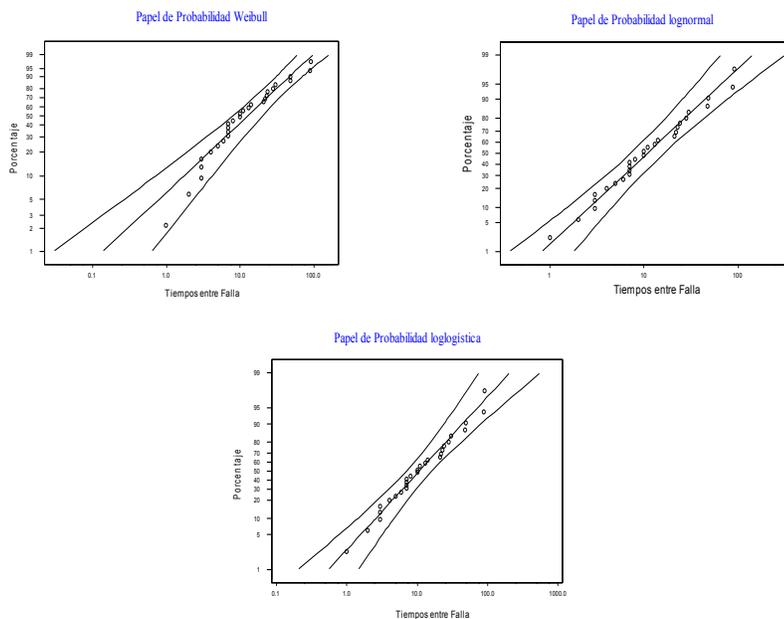


Figura 5.11: Papeles de probabilidad para los tiempos entre falla usando las distribuciones Weibull, lognormal y loglogística.

De la Figura 5.11 se observa que las distribuciones lognormal y loglogística modelan razonablemente bien los tiempos entre falla. Por otro lado, de la Figura 5.12 no se observa una clara preferencia hacia algún modelo. Así, se eligió el modelo lognormal para los tiempos entre falla y, para tener las mismas marginales, también para los tiempos entre mantenimiento.

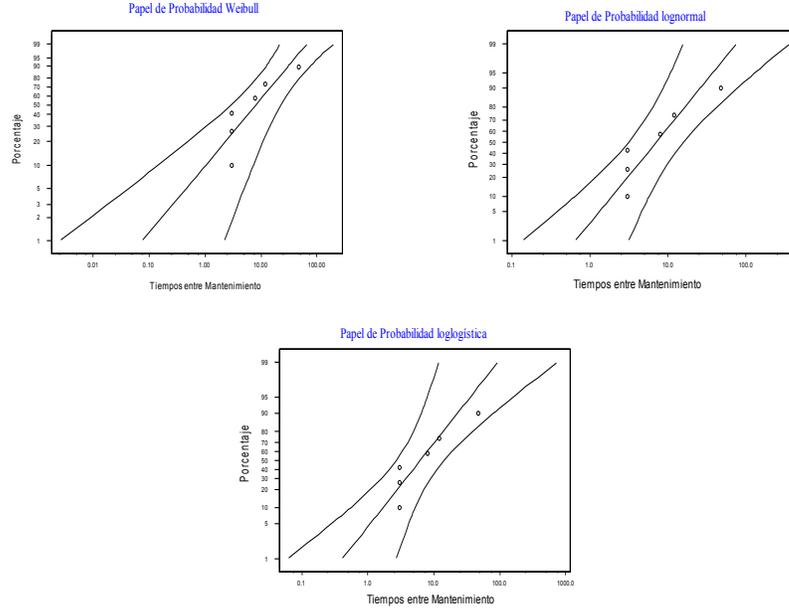


Figura 5.12: Papeles de probabilidad para los tiempos entre mantenimiento usando las distribuciones Weibull, lognormal y loglogística.

Con base en lo anterior, se propondrán como funciones de sub confiabilidad a confiabilidades lognormales multiplicadas por un peso, lo que dará como resultado una mezcla de lognormales para la confiabilidad marginal de T , como se muestra en seguida.

Mezcla de lognormales

Empezaremos por recordar la relación entre variables aleatorias normales y log normales, lo anterior para hacer la notación un poco más compacta. Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, entonces la variable aleatoria definida como $Y = \exp(X)$ sigue una distribución lognormal con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Es bien sabido que

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= \Phi \left[\frac{\log(y) - \mu}{\sigma} \right], \quad y > 0, \end{aligned}$$

donde Φ es la función de distribución normal estándar. De lo anterior, la confiabilidad y la densidad de Y están dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \bar{F}_Y(y) &= P(Y > y) \\ &= 1 - \Phi \left[\frac{\log(y) - \mu}{\sigma} \right], \quad y > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} \\ &= \frac{1}{y\sigma} \phi \left[\frac{\log(y) - \mu}{\sigma} \right], \quad y > 0, \end{aligned}$$

donde ϕ es la función de densidad normal estándar.

Con la notación anterior, los modelos para las sub confiabilidades son

$$\bar{F}_{T,C}(t, i) = \pi_i \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{\log(t) - \mu_i}{\sigma_i} \right] \right\}, \quad \pi_i \in [0, 1], \quad \mu_i \in \mathbb{R}, \quad \sigma_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad t > 0,$$

con respectivas sub densidades y confiabilidad marginal de T :

$$f_{T,C}(t, i) = \frac{\pi_i}{t\sigma_i} \phi \left[\frac{\log(t) - \mu_i}{\sigma_i} \right], \quad i = 1, 2,$$

$$\bar{F}_T(t) = \frac{\pi_1}{t\sigma_1} \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{\log(t) - \mu_1}{\sigma_1} \right] \right\} + \frac{1 - \pi_1}{t\sigma_2} \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{\log(t) - \mu_2}{\sigma_2} \right] \right\}, \quad \text{pues } \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Así, haciendo $\theta \equiv (\pi_1, \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2)$, se tiene que la log verosimilitud es

$$l(\theta; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n_1} \log[f_{T,C}(t_{i1}, 1)] + \sum_{i=1}^{n_2} \log[f_{T,C}(t_{i2}, 2)].$$

Las estimaciones máximo verosímiles para los parámetros y las gráficas de las verosimilitudes perfiles relativas se muestra a continuación.

$$\hat{\theta} \approx (0.8235, 2.3858, 1.1014, 1.9552, 1.0140).$$

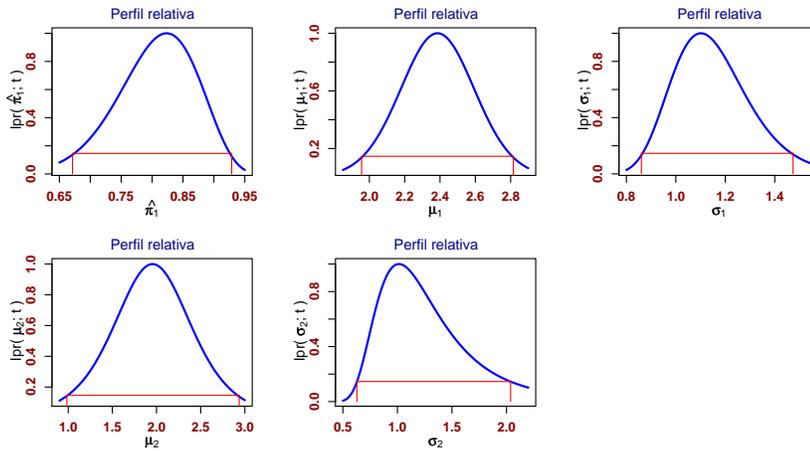


Figura 5.13: Verosimilitudes perfiles relativas e intervalos aproximados de verosimilitud confianza de 95 % para los parámetros del modelo mezcla de lognormales.

De la Figura 5.13 se observa que hay una menor incertidumbre en la estimación de los parámetros para $\bar{F}_{T,C}(t, 1)$ que para los parámetros de $\bar{F}_{T,C}(t, 2)$, lo que se ve reflejado en la longitud de los intervalos calculados. Lo anterior es debido a la cantidad de datos de cada causa de paro que se utilizaron en la estimación. Así, en la Figura 5.14 se presentan las gráficas para las funciones de sub confiabilidad estimadas de (T, C) así como de la marginal T (el tiempo de paro del equipo) y C (la causa de paro).

5.3.2. Enfoque de tiempos latentes

En este enfoque, además de tener como objetivo estimar la distribución de (T, C) , son de importancia las distribuciones o confiabilidades de los tiempos conceptualizados como latentes (de falla y mantenimiento), que técnicamente no se observan pero es de interés tener conocimiento de éstos.

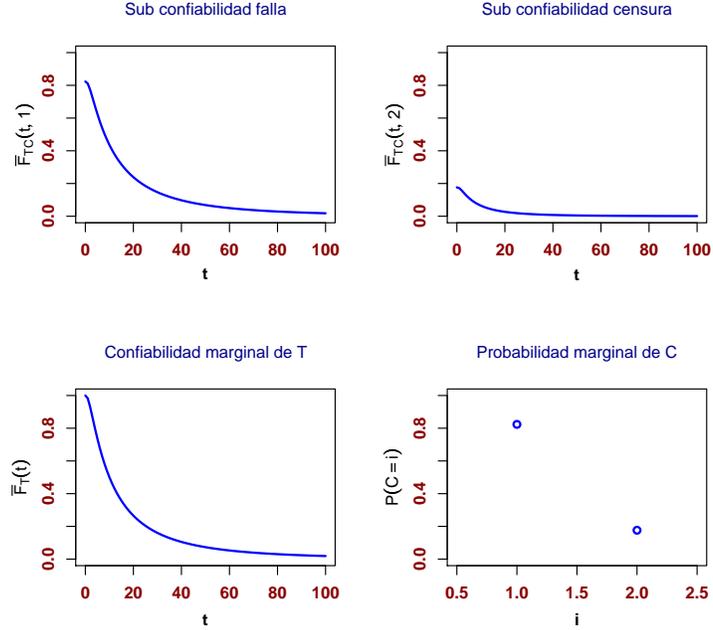


Figura 5.14: Sub confiabilidades para falla, censura y confiabilidad marginal de T .

Signos aleatorios

Considerando a T_1 como el tiempo de falla y a T_2 como el tiempo de censura (mantenimiento), como se mencionó en la sub sección 4.7.2, el modelo de signos aleatorios establece que

$$T_2 = T_1 - \epsilon, \quad \text{con } \text{sgn}(\epsilon) \text{ independiente de } T_1.$$

En la Figura 5.15 se muestran las siguientes cantidades empíricas:

- Probabilidad de paro por mantenimiento después del tiempo t : $P(T_2 < T_1 | T > t)$, $T = \min\{T_1, T_2\}$. Observe que

$$\begin{aligned} P(T_2 < T_1 | T > t) &= \frac{P(T_2 < T_1, T > t)}{P(T > t)} \\ &= \frac{P(T > t, C = 2)}{P(T > t, C = 1) + P(T > t, C = 2)} \\ &= \frac{\bar{F}_{T,C}(t, 2)}{\bar{F}_{T,C}(t, 1) + \bar{F}_{T,C}(t, 2)}. \end{aligned}$$

Las sub confiabilidades requeridas se estimaron en forma empírica utilizando la función “cmprsk”, [27], [28].

- Sub confiabilidades para falla y mantenimiento (censura).
- Sub confiabilidades normalizadas para falla y mantenimiento:

$$\frac{\bar{F}_{T,C}(t, i)}{P(C = i)}, \quad i = 1, 2,$$

donde $P(C = i)$, $i = 1, 2$ se estimaron usando probabilidad clásica (casos a favor entre total de casos).

- Sub confiabilidades normalizadas para falla y mantenimiento junto con la estimación Kaplan-Meier (subsección 3.2.1) para la confiabilidad de los tiempo entre falla, donde se consideraron los tiempos entre mantenimientos como censura. Cabe recordar que el estimador de Kaplan-Meier asume independencia entre falla y censura, lo cual en este caso, no necesariamente se cumple.

De la Figura 5.15 se observa que, en general, la sub confiabilidad normalizada para falla es mayor que la correspondiente para mantenimiento, de modo que, con base en el Teorema 4.7.2, el modelo de signos aleatorios puede ser adecuado para los datos.

En un buen plan de mantenimiento, el cual puede ser basado en condición, las sub confiabilidades empíricas normalizadas de falla y mantenimiento deben ser bastante similares, lo que significa que los mantenimientos, cuando éstos se realizan antes de que falle el equipo, se están haciendo muy cercanos a los tiempos en que hubiera fallado, que sería lo ideal (Figura 4.7) [5]. Con esto en mente, la mayor diferencia entre los valores de las sub confiabilidades empíricas normalizadas para falla y censura es de 0.3214, la cual pudiera ser significativa e indicar una diferencia estadística entre éstas e interpretarse como una posible área de oportunidad para mejorar la calidad del mantenimiento al equipo.

De la Figura 5.15 se observa que la confiabilidad marginal de falla usando Kaplan-Meier es muy similar a la respectiva sub confiabilidad empírica normalizada, hecho que puede deberse a que se tienen pocos mantenimientos comparados con fallas y la dependencia que pudiera existir no influye demasiado al momento de la estimación.

Las sub confiabilidades empíricas normalizadas junto con la estimación Kaplan-Meier para falla y censura se muestran en la Figura 5.16. Observe que la estimación Kaplan-Meier, suponiendo al mantenimiento como evento de interés y a la falla como censura, contiene escasa infomación para valores mayores a 50. Esto es consecuencia de la gran cantidad de tiempos censurados (fallas) con respecto al evento de interés (mantenimiento). De nuevo, cabe resaltar

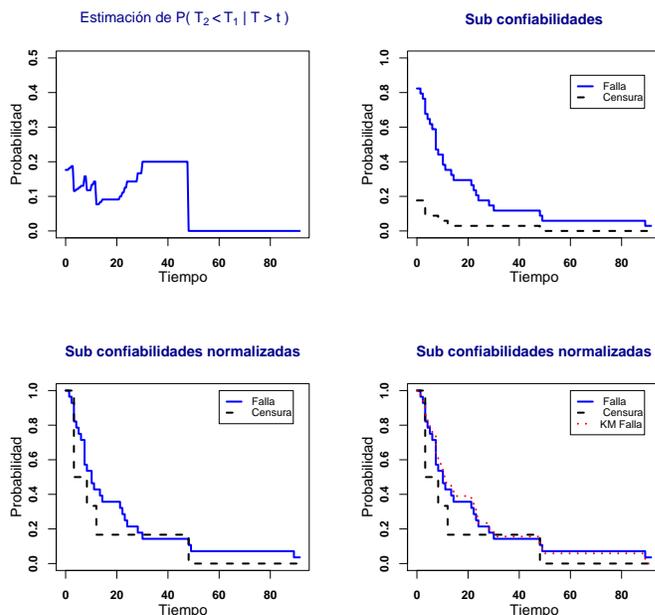


Figura 5.15: Cantidades estimables con los datos de riesgos en competencia.

el supuesto de independencia que no necesariamente se tiene.

Con base en el método de máxima verosimilitud, se ajustan dos modelos lognormales: en el primero se utiliza solamente los tiempos entre falla y en el segundo usando los tiempos entre falla y censura suponiendo independencia entre estos. Las estimaciones para los parámetros se presentan en la Tabla 5.3 y en la Figura 5.17 se muestran las verosimilitudes perfiles relativos de los mismos.

Modelo 1	Modelo 2
$\hat{\mu} \approx 2.38581$	$\hat{\mu} \approx 2.444498$
$\hat{\sigma} \approx 1.10141$	$\hat{\sigma} \approx 1.091731$

Tabla 5.3: Estimaciones de los parámetros para los dos modelos lognormal.

Por otro lado, una gráfica de los modelos ajustados se muestra en la Figura 5.18 observándose que, como se esperaba, no existe mucha discrepancia entre las estimaciones, pues las confiabilidades empíricas son semejantes.

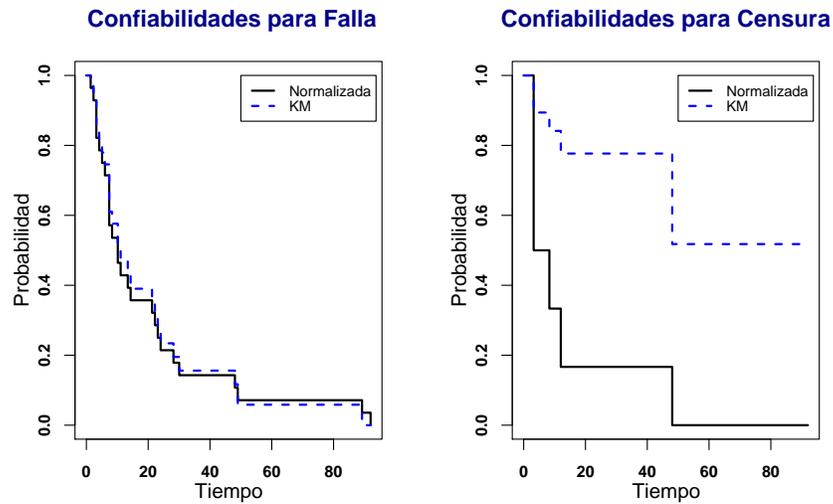


Figura 5.16: Estimaciones empíricas de confiabilidades.

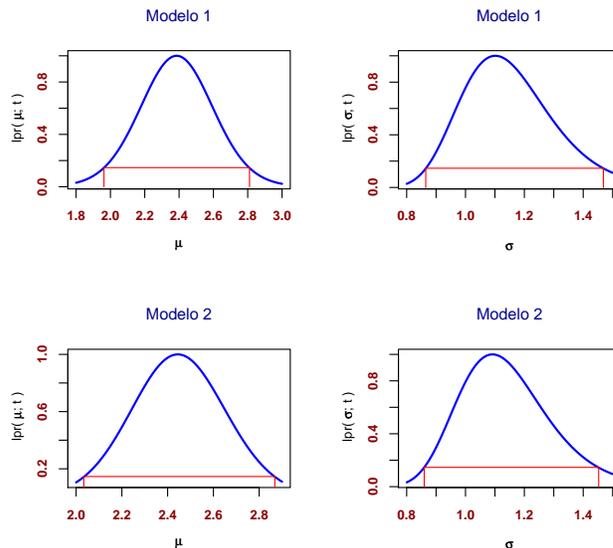


Figura 5.17: Verosimilitudes perfiles relativas para los parámetros de los dos modelo e intervalos aproximados de verosimilitud confianza de 95 %.

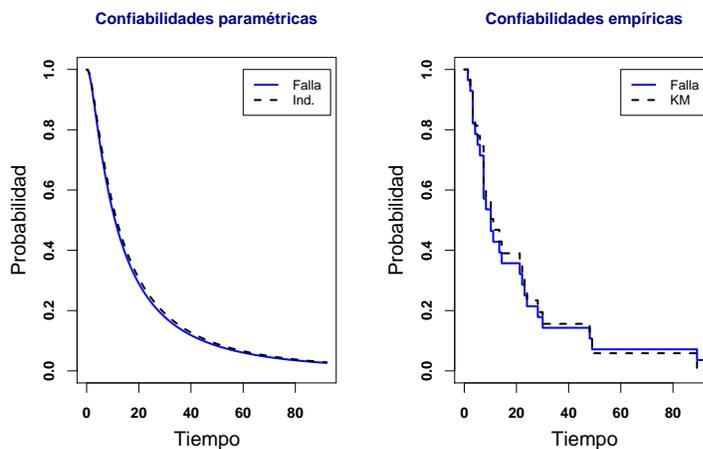


Figura 5.18: Confiabilidades paramétricas (lognormal) y no paramétricas (sub confiabilidad normalizada y Kaplan-Meier) para falla.

Estimación de confiabilidades marginales utilizando cópulas

Aquí se utiliza el Copula graphic estimator para hacer estimación semiparamétrica de las confiabilidades marginales. En la aplicación de este procedimiento se necesita que los tiempos (entre falla y mantenimiento) sean distintos, de modo que de los datos con que se contaron se excluyeron los tiempos repetidos. En el caso de tiempos comunes con diferente causa, se les dio preferencia a los tiempos entre mantenimiento en lugar que a los de falla.

Debido a que el método necesita una función de cópula para realizar la estimación, se utilizaron las siguientes cópulas [32]:

- *Independiente*

$$C(u, v) = uv,$$

- *Gamma*

$$C_\alpha(u, v) = u + v - 1 + \left[\left(\frac{1}{1-u} \right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{1-v} \right)^{\alpha-1} - 1 \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \alpha \geq 1,$$

- *Frank*

$$C_\alpha(u, v) = \log_\alpha \left[1 + \frac{(\alpha^u - 1)(\alpha^v - 1)}{\alpha - 1} \right], \quad \alpha \in (0, \infty) \setminus \{1\},$$

- *Gumbel*

$$C_\alpha(u, v) = \exp \left\{ - [(-\log(u))^\alpha + (-\log(v))^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \quad \alpha \geq 1,$$

donde $u, v \in [0, 1]$.

En la Figura 5.19 se presenta la relación que mantienen el parámetro α de cada cópula con la medida de asociación τ de Kendall.

A cada cópula, excepto a la independiente, se le asignó un respectivo valor de α para que la τ de Kendall tomara un valor de 0.5. En los resultados obtenidos y presentados en la Figura 5.20 se observa que, al parecer, no hay diferencia significativa en las confiabilidades marginales de falla utilizando Kaplan-Meier y las cópulas, no así en las estimaciones para la confiabilidad del mantenimiento, donde la estimación de Kaplan-Meier difiere considerablemente de las demás, sobre todo para valores de tiempo mayores que 60, lo cual habla de la sobrestimación de la confiabilidad que se obtiene al utilizar Kaplan-Meier cuando el supuesto de independencia no es adecuado, pues se consideró $\tau = 0.5$ en la estimación. Como se esperaba, las estimaciones utilizando la cópula independiente y Kaplan-Meier coinciden para ambas confiabilidades.

En la Figura 5.21 se muestran las confiabilidades obtenidas utilizando las diferentes cópulas y variando el nivel de dependencia. Los resultados para la confiabilidad de falla no presentan variaciones considerables, lo cual habla de una cierta propiedad de robustez en el tipo de cópula. Por otro lado, la confiabilidad para la censura presenta cambios notables a variaciones de la dependencia. Esto puede ser consecuencia de los pocos tiempos entre censura que se usaron en la estimación.

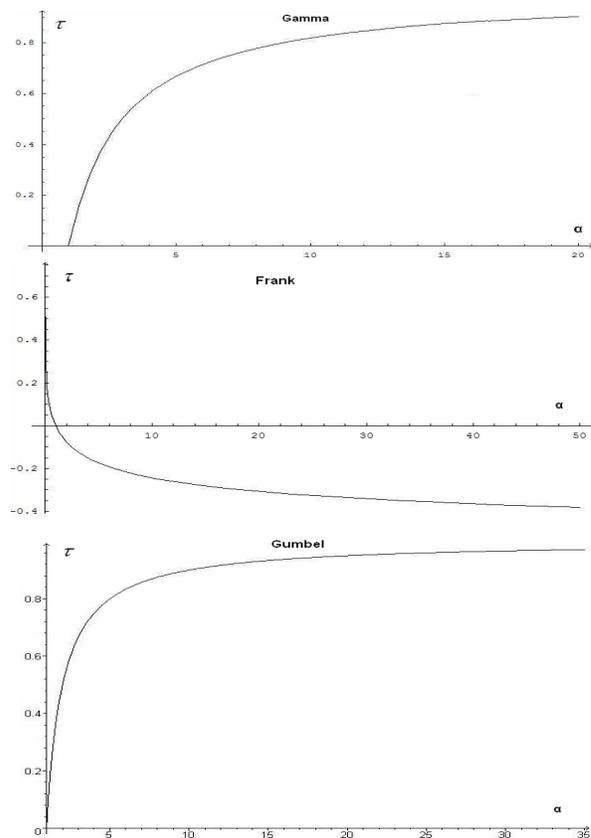


Figura 5.19: Relación entre α y τ para las cópulas utilizadas.

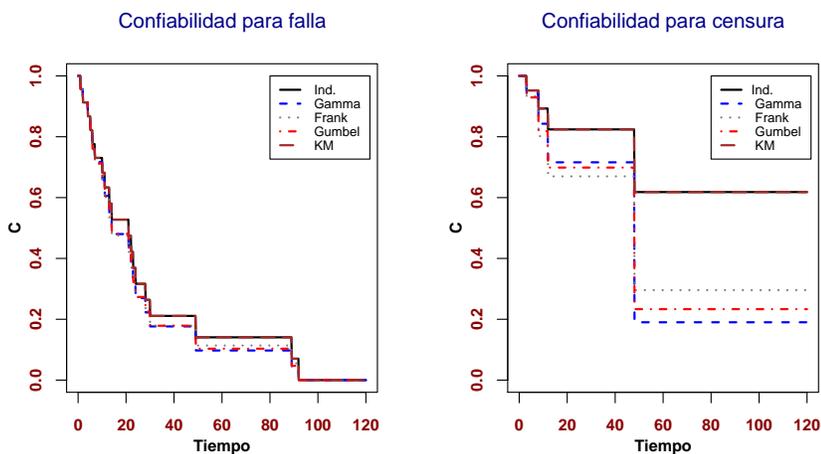


Figura 5.20: Estimaciones para las confiabilidades marginales de falla y censura (mantenimiento) utilizando α tal que $\tau = 0.5$.

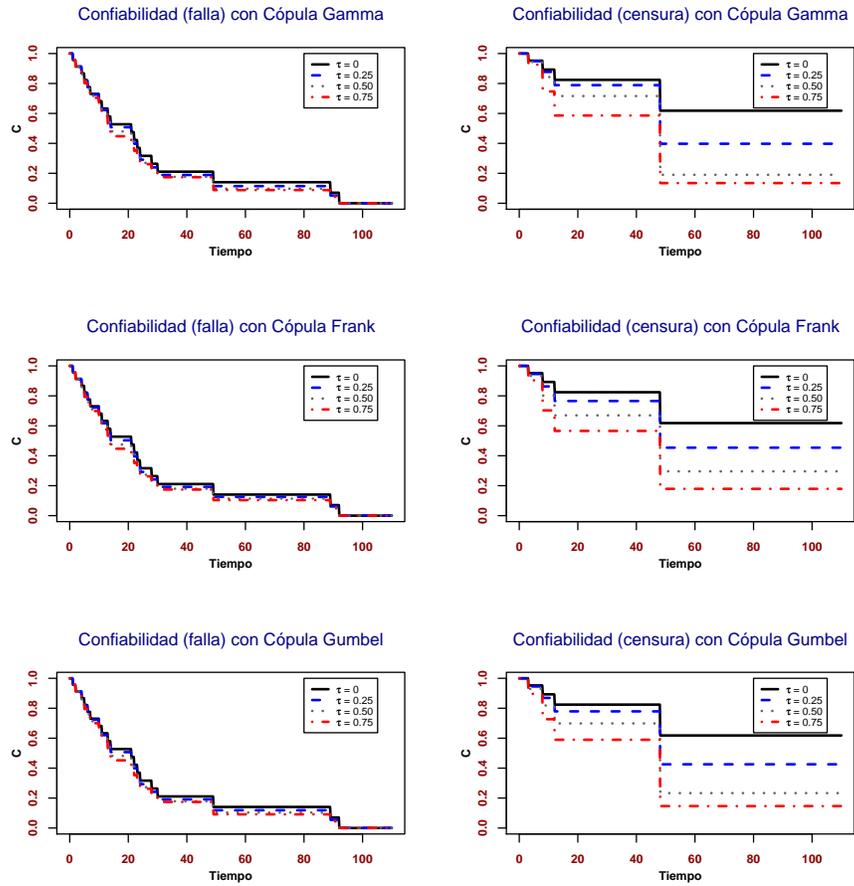


Figura 5.21: Estimaciones para las confiabilidades marginales de falla y censura (mantenimiento) utilizando los siguientes valores $\tau = 0, 0.25, 0.50, 0.75$.

Estimación de un modelo lognormal bivariado usando la cópula Gumbel

En esta parte se proponen un modelo lognormal bivariado que se obtiene usando la cópula Gumbel y marginales lognormales.

La cópula Gumbel está dada por

$$C_\alpha(u, v) = \exp \left\{ - [(-\log(u))^\alpha + (-\log(v))^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \quad \alpha \geq 1, \quad u, v \in [0, 1],$$

de modo que la distribución conjunta es

$$\begin{aligned} F_{T_1, T_2}(t_1, t_2) &= P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2) \\ &= C_\alpha(F_{T_1}(t_1), F_{T_2}(t_2)), \quad t_1, t_2 > 0, \end{aligned}$$

con distribuciones lognormales marginales

$$F_{T_1}(t_1) = \Phi \left[\frac{\log(t_1) - \mu_1}{\sigma_1} \right], \quad \mu_1 \in \mathbb{R}, \quad \sigma_1 > 0, \quad F_{T_2}(t_2) = \Phi \left[\frac{\log(t_2) - \mu_2}{\sigma_2} \right], \quad \mu_2 \in \mathbb{R}, \quad \sigma_2 > 0.$$

De lo anterior, la confiabilidad conjunta de (T_1, T_2) es

$$\bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = 1 - F_{T_1}(t_1) - F_{T_2}(t_2) + C_\alpha[F_{T_1}(t_1), F_{T_2}(t_2)],$$

de donde las sub densidades están dadas por

$$f_{T,C}(t, i) = - \left. \frac{\partial \bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2)}{\partial t_i} \right|_{t_1=t_2=t},$$

esto es

$$\begin{aligned} f_{T,C}(t, 1) &= - \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \{1 - F_{T_1}(t_1) - F_{T_2}(t_2) + C_\alpha[F_{T_1}(t_1), F_{T_2}(t_2)]\} \right|_{t_1=t_2=t} \\ &= \frac{1}{t\sigma_1} \phi \left[\frac{\log(t) - \mu_1}{\sigma_1} \right] - \left. \frac{\partial C_\alpha}{\partial F_{T_1}} \frac{dF_{T_1}(t_1)}{dt_1} \right|_{t_1=t_2=t} \\ &= \frac{1}{t\sigma_1} \phi \left[\frac{\log(t) - \mu_1}{\sigma_1} \right] \left[1 - \left. \frac{\partial C_\alpha}{\partial F_{T_1}} \right|_{t_1=t_2=t} \right], \quad t > 0, \\ f_{T,C}(t, 2) &= \frac{1}{t\sigma_2} \phi \left[\frac{\log(t) - \mu_2}{\sigma_2} \right] \left[1 - \left. \frac{\partial C_\alpha}{\partial F_{T_2}} \right|_{t_1=t_2=t} \right], \quad t > 0. \end{aligned}$$

La función de log verosimilitud sería

$$l(\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, \alpha, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n_1} \log[f_{T,C}(t_{i1}, 1)] + \sum_{i=1}^{n_2} \log[f_{T,C}(t_{i2}, 2)],$$

de donde la estimación de los parámetros es

$$(\hat{\mu}_1, \hat{\sigma}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_2, \hat{\alpha}) \approx (2.3845, 1.0771, 2.9373, 1.1468, 2.6710).$$

Para calcular las verosimilitudes perfiles de las marginales para $\mu_i, \sigma_i, i = 1, 2$, se fijó el parámetro de dependencia $\alpha = 2.6710$, lo anterior debido a problemas numéricos. En la Figura 5.22 se muestran los resultados y se observa que la verosimilitud perfil relativa del parámetro de dependencia α es poco informativa pues, a pesar de que se observa un máximo en la función, lo que implica una estimación puntual, la cola derecha es lo suficientemente pesada para dar intervalos de verosimilitud no informativos. Esto puede ser consecuencia del hecho de que los datos no tienen información de la dependencia entre los riesgos.

En la Figura 5.23 se presentan las confiabilidades estimadas para falla utilizando el método propuesto en [32] y el modelo de signos aleatorios. En general, no se observan grandes diferencias en la estimación.

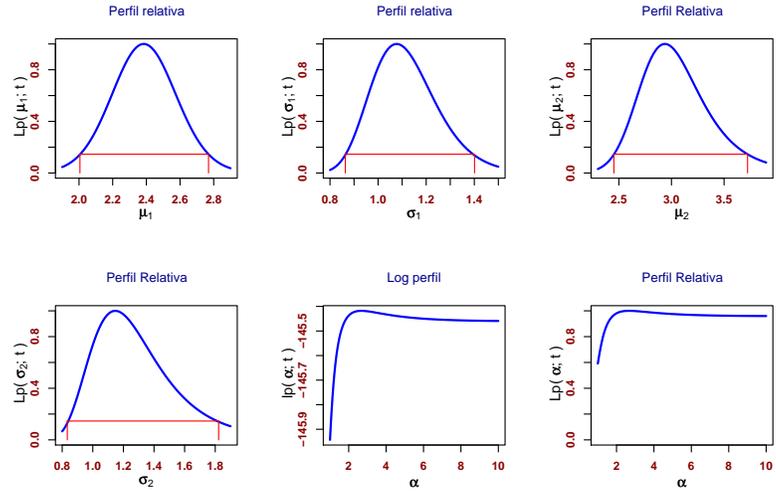


Figura 5.22: Verosimilitudes relativas perfiles e intervalos aproximados de verosimilitud confianza de 95 % para los parámetros de (5.1).

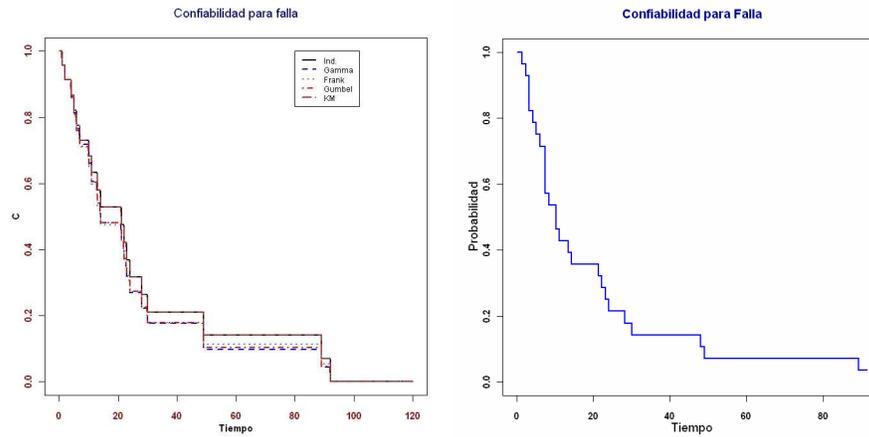


Figura 5.23: Confiabilidades marginales para falla usando el método propuesto en [32] con las cópulas propuestas ($\tau = 0.5$) y utilizando el modelo de signos aleatorios.

5.4. Conclusiones

El problema de riesgos en competencia se puede presentar en diferentes contextos. En este trabajo se le abordó desde el campo de confiabilidad, y más precisamente, en el de mantenimiento preventivo en sistemas reparables. Se explicó que el tipo de datos que se obtienen pueden ser del tipo de riesgos en competencia, para los cuales se necesitan modelos especiales. Uno de los modelos que se estudiaron fue el de Signos Aleatorios, que puede ser adecuado para explorar y valorar la calidad del mantenimiento basado en condición, es decir, la calidad del monitoreo al equipo. En este caso, como se ha mencionado, un buen plan de monitoreo se refleja en la similaridad de las sub confiabilidades escaladas o normalizadas. Las sub confiabilidades de los datos con los que se trabajó presentan cierta diferencia, lo que evidencia una posible área de oportunidad para la planificación del mantenimiento.

Se analizaron los dos enfoques de riesgos en competencia que se presentan en la literatura: el bivariado y el de tiempos latentes. En lo que respecta al enfoque bivariado, no se presentaron grandes problemas para la estimación de los parámetros en los modelos de sub confiabilidad lognormales propuestos, ya que los modelos son ad hoc para el proceso de estimación. Por otro lado, para el caso de tiempos latentes se presentan problemas en la estimación del correspondiente parámetro de dependencia cuando se trabajó con el modelo lognormal bivariado utilizando la cópula Gumbel. Este problema se debe a que, en general, los datos no tienen información sobre la dependencia de los tiempos latentes (T_1, T_2) .

El problema de modelar la dependencia de los riesgos se puede atacar utilizando cópulas, y con ellas el método propuesto en [32] para estimar las confiabilidades marginales sin que se presente el problema de la no identificabilidad. Además de establecer una cópula para la estimación, el método requiere precisar un valor del correspondiente parámetro de dependencia. De no contar con información adicional a los datos obtenidos, dicho valor puede representar una seria dificultad ya que, como se ha enfatizado a lo largo del este trabajo, éstos no proporcionan información sobre dependencia.

5.5. Trabajo futuro

Una posible extensión a este trabajo, y que surge de manera natural, es la construcción de intervalos de confianza para las estimaciones de las confiabilidades usando cópulas y el modelo de signos aleatorios, ya que no se cuenta con una cuantificación de la incertidumbre.

Como se ha visto, la modelación y cuantificación de la dependencia o grado de asociación entre los riesgos es muy importante, de modo que es necesario obtener información de la dependencia. Una posible fuente de información puede ser una persona con bastante conocimiento y experiencia en el manejo del equipo en cuestión y como consecuencia, otro punto a desarrollar se puede enfocar en el problema de la obtención de información sobre la dependencia a través de esta persona experta. Lo anterior podría llevar, por ejemplo, a una distribución de probabilidad para el parámetro de dependencia y desembocar en un análisis Bayesiano.

Por otro lado, del modelo de signos aleatorios se puede detectar un alto grado de dependencia al comparar las sub confiabilidades condicionales o normalizadas. Con base en esto, se podría diseñar un estudio de simulación para “calibrar” la separación de las curvas y posteriormente, de la observación de las gráficas, poder proponer un valor que cuantifique la dependencia.

Pensando en la estimación de las marginales usando cópulas, una pregunta interesante es ¿cómo elegir la(s) cópula(s) para hacer la estimación?. Por último, se puede pensar en diseñar

una forma de comparar los métodos mediante los cuales se obtuvieron estimaciones de las confiabilidades marginales para falla.

Bibliografía

- [1] Ascher, H. & Feingold, H. (1984) Repairable Systems Reliability. Modeling, Inference, Misconceptions and their causes. Marcel Dekker.
- [2] Becker, R., Chambers, J. & Wilks, A. (1988) The new S Language. A Programming environment for data analysis and graphics. Wadsworth & Brooks/Cole.
- [3] Bedford, T. & Cooke, G. (2001) Probabilistic Risk Analysis. Foundations and Methods. Cambridge University Press.
- [4] Bedford, T. & Meilijson, I. (1997) A Characterization of Marginal Distributions of (Possibly Dependent) Lifetime Variables which Right Censor each other. *The Annals of Statistics* **25**, 1622-1645.
- [5] Bunea, C., Bedford, T. (2002) The Effect of Model Uncertainty on Maintenance Optimization. *IEEE Transactions on Reliability* **4**, 486-493.
- [6] Bunea, C., Cooke, R.M., Lindqvist, B. (2003) Competing risk perspective over reliability data bases. *Mathematical and Statistical Methods in Reliability (B.H. Lindqvist and K.A.Doksum eds)* World Scientific Publishing, Singapore, 355-370.
- [7] Cox, D.R. (1959) The analysis of exponentially distributed lifetimes with two types of failure. *J. Roy. Statist. Soc. B* **21**, 411-421.
- [8] Cooke, R. (1993) The total time on test statistic and age-dependent censoring. *Statistics & Probability Letters* **19**, 307-312.
- [9] Crowder, M. (1994) Identifiability Crises in Competing Risks. *International Statistical Review* **62**, 379-391.
- [10] Crowder, M. (2001) Classical Competing Risks. Chapman & Hall/CRC.
- [11] Crowder, M.J., Kimber, A.C., Smith, R.L., Sweeting, T.J. (1991) Statistical Analysis of Reliability Data. New York: Chapman & Hall.
- [12] David H.A., Moeschberger M.L. (1978) The Theory of Competing Risks. Griffin: London.
- [13] Duane, J.T. (1964) Learning Curve Approach to Reliability Monitoring. *IEEE Transactions on Aerospace*, **2**, 563-566.
- [14] Duffuaa, S., Raouf, A. & John Dixon Campbell. (1999) Planning and Control of Maintenance Systems: Modeling and Analysis. John Wiley & Sons.
- [15] Gumbel, E. J. (1960) Bivariate Exponential Distributions. *Journal of the American Statistical Association* **292**, 698-707.
- [16] Jogdeo, K. (1982) Concepts of dependence. In: Kotz S, Johnson NL (eds) Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol 1. Wiley, New York, pp 324 – 334.

- [17] Kaplan, E.L., Meier, P. (1958) Nonparametric Estimation from Incomplete Observations. *Journal of the American Statistical Association* **282**, 457-481.
- [18] Kalbfleisch, J. & Prentice, R. (2002) The Statistical Analysis of Failure Time Data. John Wiley & Sons.
- [19] Lawless, J. (1983) Statistical Methods in reliability. *Technometrics* **25**, 305-316.
- [20] Lawless, J. (2003) Statistical Models and Methods for Lifetime Data. John Wiley & Sons.
- [21] Lee, L. (1980) Testing adequacy of the Weibull and Log Linear Rate models for a Poisson Process. *Technometrics* **22**, 195-199.
- [22] Levitt, J. (2003) Complete Guide to Preventive and Predictive Maintenance. Industrial Press.
- [23] Meeker, W. Q., Escobar, L.A. (1998) Statistical Methods for Reliability Data. New York: John Wiley & Sons.
- [24] Mood, A., Graybill, F. Boes, D. Introduction to the Theory of Statistics. Third Edition, McGraw-Hill. Series in Probability and Statistics.
- [25] Nelsen, R. (2006) An Introduction to Copulas. (2nd Edition) Springer.
- [26] Nelson, W. B. (1970) Hazard plotting methods for analysis of life data with different failure modes. *J. Qual. Technol.* **2**, 126-149.
- [27] Pintilie, M. (2006) Competing Risks. A Practical Perspective. John Wiley & Sons.
- [28] R Development Core Team (2007). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.
- [29] Rigdon, S. & Basu, A. (2000) Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems. John Wiley & Sons.
- [30] Sprott, D.A. (2000) Statistical Inference in Science. Springer Series in Statistics.
- [31] Tsiatis, A. (1975) A Nonidentifiability Aspect in the Problem of Competing Risks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **72**, 20-22.
- [32] Zheng, M. & Klein, P. (1995) Estimates of Marginal Survival for Dependent Competing Risks Based on an Assumed Copula. *Biometrika* **82**, 127-138.